Clase virtual Nº 9

La clase de Matemática en la enseñanza de las fracciones.

Autoras: Graciela Chemello, Silvia Chara, Mónica Agrasar y Analía Crippa
Equipo Áreas Curriculares del Ministerio de Educación

Introducción

En este módulo avanzamos en la respuesta a la pregunta: ¿cómo pueden evolucionar los conocimientos didácticos de los maestros en el ámbito del trabajo cotidiano en la escuela?

En diversas capacitaciones se ha intentado actualizar los conocimientos didácticos presentando la teoría didáctica en forma aislada de la práctica. En estos casos, se esperaba que más adelante los docentes aplicaran los conocimientos trabajados. Pero de esta manera no se lograba articular la teoría y la práctica.

En esta clase abordaremos esa cuestión desde otra perspectiva de actualización, en la que la teoría aporte en primer lugar al análisis y a la reflexión sobre la práctica, y luego sea conceptualizada. En este marco y según el enfoque de enseñanza que venimos planteando en clases anteriores, nos hacemos dos nuevas preguntas: ¿qué tipo de gestión de la clase da lugar a la producción de conocimientos matemáticos por parte de los alumnos? y ¿qué nociones de la Didáctica de la Matemática aportan en este sentido?

Tal como señalamos en la Clase 5, la actividad principal en una clase de matemática es la resolución de problemas y la reflexión sobre ella. Esto implica por parte del maestro tanto la elección de problemas desafiantes y a la vez adecuados a los conocimientos de sus alumnos, como una particular gestión de la clase. Así como en aquella Clase nos centramos en la elaboración de criterios para seleccionar problemas, en esta nos abocaremos a profundizar en las condiciones de la gestión de clase que favorezcan la "actividad matemática" de todos y cada uno de los alumnos, atendiendo a que las interacciones del alumno con el problema, con los otros alumnos y con el docente estén orientadas a la producción de conocimientos.

En la clase 11 abordaremos cómo trabajar estas cuestiones con los docentes en el espacio de la capacitación.

La clase de matemática y el contrato didáctico

Todos hemos participado alguna vez –ya sea como docentes o como alumnos– de clases de matemática en las cuales el docente comenzaba explicando una nueva noción y la forma de realizar algún procedimiento relacionado con ella. Luego, los alumnos hacían preguntas y resolvían diversos tipos de ejercicios. En la escuela primaria, esos ejercicios consistían generalmente de muchas cuentas o de una variedad de problemas con el fin de que los alumnos "aplicaran" lo que habían "aprendido". Finalmente, el docente corregía lo realizado u organizaba una autocorrección.

En este escenario podríamos reconocer una gran diversidad de comportamientos que tanto el docente como el alumno esperan del otro. Con respecto al alumno, ¿puede esperar, por ejemplo, que el docente le enseñe directamente el tema en forma teórica1 y luego le explique cómo resolver ejercicios utilizándolo? ¿Y puede considerar que solo el docente es capaz de determinar si lo realizado es correcto? Por otro lado, ¿el docente puede tener la expectativa de que todos los alumnos entiendan la explicación solamente habiéndola escuchado? ¿Puede esperar que todos utilicen el procedimiento de resolución enseñado? ¿Y puede suponer que si todos llegan al resultado correcto, se debe a que todos aprendieron ese tema?

Según la perspectiva acerca de la enseñanza de la Matemática en la que nos ubicamos, las expectativas de los docentes y de los alumnos deberían ser diferentes. Justamente, atender a esas expectativas es un foco de análisis de esta perspectiva, que deriva de los trabajos de Guy Brousseau.

Al intentar explicar algunas de las posibles causas del fracaso de los alumnos en matemática –entre otras cuestiones–, este autor definió la noción de contrato didáctico de la siguiente manera:

> "[...] conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumnos, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumno-saber, defiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?".
>
> Brousseau citado por Charnay, 1994: 54.

[1] En términos de la teoría antropológica, las nociones, procedimientos y definiciones reconocidos como parte de la Matemática se denominan objetos culturales.

En esta relación que se establece entre el docente y los alumnos a propósito de una cierta actividad matemática, el docente comunica cuestiones relativas tanto al objeto del que se trata como a ciertas reglas o normas de “lo que se puede o no hacer” en la clase, expresándolo unas veces con palabras y otras veces, mediante gestos y actitudes. Es decir que ciertas cuestiones se comunican en ocasiones de manera explícita, pero mayoritariamente en forma implícita.

Como dicho contrato es individual, en una misma clase distintos alumnos pueden tener distintas percepciones de lo que se espera de ellos, lo que hace que puedan coexistir distintas variantes del contrato.

Debido a estas características del contrato didáctico (individual, fundamentalmente implícito), es su ruptura lo que pone en evidencia su existencia. Por ejemplo, si un docente propone habitualmente problemas cuyos enunciados contienen todos los datos útiles para resolverlos, o los datos en el orden en que pueden usarse, y presenta a sus alumnos un problema con datos de más, insuficientes o en distinto orden, esto puede dar lugar a la ruptura del contrato. En el primer caso, esta ruptura podría manifestarse con resoluciones en las que los alumnos usaran todos los datos.

En síntesis, todo lo que el docente hace en el aula, todo lo que manifiesta a través de palabras, gestos y silencios es “interpretado” de alguna manera por los alumnos y tiene consecuencias en su aprendizaje. Reflexionar sobre esta cuestión podría mejorar las condiciones en las que se desarrolla el proceso de enseñanza de la matemática.

Recomendación de lectura

Para aquellos que quieran profundizar sobre la noción de contrato didáctico, se recomienda la lectura del artículo de Patricia Sadovsky, “La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática”.

Además, en el aula existen expectativas mutuas de docentes y alumnos que no dependen del contenido de estudio y que se enmarcan en lo que se denomina “contrato pedagógico”. Chevallard, Bosch y Gascón (1997) plantean diferencias entre el contrato pedagógico y el contrato didáctico, a partir del análisis de una situación que a menudo se presenta en las aulas, el murmullo de los alumnos, y que puede estar relacionada con distintos contratos.

"El profesor deja de escribir en la pizarra y se gira enojado hacia sus alumnos porque estos no paran de hablar.

[...] puede ser que a los alumnos les repela el 'estilo' pedagógico del profesor porque parece menospreciarlos o porque no tiene suficiente autoridad, etc. Pero a lo mejor los murmullos responden a una ruptura del contrato didáctico por parte del profesor: quizá está resolviendo el problema con una técnica que los alumnos no conocen; o bien es que no muestra claramente lo que los alumnos deberán hacer por sí mismos al respecto; o tal vez actúa como si los alumnos tuvieran ciertas informaciones que ellos desconocen, etc. La observación de clases muestra que este es el origen más frecuente de los murmullos espontáneos que suelen surgir en el aula".

Chevallard, Bosch y Gascón, 1997: 205.

De este modo, el contrato pedagógico "[...] exige del alumno una confianza general en el profesor, en las decisiones que este toma, y un respeto a su autoridad. Al mismo tiempo, también exige del profesor una atención y responsabilidad especiales hacia los alumnos y sus condiciones de trabajo" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997: 205).

Ahora bien, volviendo a las interacciones en la clase ligadas al conocimiento matemático, es posible identificar lo que algunos autores denominan "normas sociomatemáticas"2, que regulan los procesos de producción matemática. Estas normas adquieren características propias para cada campo de la Matemática y para cada institución en las que se utilizan. Mientras que algunas pueden ser reconocidas y explicitadas tanto por los docentes como por los alumnos, otras son más sutiles y difíciles de explicitar.

Son ejemplos de estas normas: decidir "cuándo dos procedimientos son matemáticamente diferentes", analizar "si la respuesta al problema es adecuada para la pregunta formulada", identificar "cuándo un procedimiento es económico" y "cuándo una explicación es aceptable matemáticamente". Por ejemplo, es aceptable una explicación basada en una representación gráfica cuando se inicia el estudio de las fracciones, pero ya en la escuela secundaria se espera una explicación basada en propiedades matemáticas.

[2] Yackel y Cobb (1997) analizan el proceso de elaboración de normas propias de la actividad matemática en una clase. Por su parte, Sadovsky (2005) sostiene que esta noción puede vincularse con la noción de contrato didáctico.

La clase de matemática y su gestión

Ya hemos planteado que en una clase que consiste en la resolución de problemas es fundamental, por un lado, que se incluyan explicaciones que avalen lo hecho y que le permitan al alumno explicitar las ideas sobre las que se basó y, por otro, que este pueda escuchar las objeciones de sus compañeros que pongan a prueba su producción. Estos momentos de trabajo hacen que los alumnos se enfrenten a una práctica de la matemática no mecánica, sino fundamentada.

Para que esto sea posible, ¿de qué cuestiones debería ocuparse el docente? Debería planificar la clase, presentar la situación al grupo y conducir tanto la producción autónoma de los alumnos, como la reflexión y la elaboración de conclusiones. En los próximos apartados nos referiremos a estas tareas del docente y veremos cómo los aportes didácticos permiten enriquecer nuestra mirada sobre ellas.

La elección de los problemas

Como comentamos antes, para cada contenido de enseñanza es función del docente seleccionar un conjunto de problemas que permitirán a los alumnos “vivir” un conjunto de prácticas determinadas que otorguen sentido al contenido en cuestión.

En el momento de realizar la selección, el docente analiza la “contextualización” del objeto de enseñanza en el problema elegido tomando en cuenta que dicha contextualización sea verosímil y significativa para los alumnos.

Brousseau se refiere al concepto de contextualización en el campo de la Didáctica de la Matemática del siguiente modo:

> El matemático no comunica los resultados tal como los ha hallado; los reorganiza, les da la forma más general posible; realiza una “didáctica práctica”, que consiste en dar al saber una forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada, atemporal.
>
> El docente realiza el trabajo inverso al del científico, una recontextualización y repersonalización del saber. Busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar.
>
> Brousseau, 1988: 65.

En el caso de las fracciones, no es muy sencillo elegir contextualizaciones en problemas extramatemáticos, ya que son de uso restringido en la vida cotidiana. No obstante, tanto las situaciones de reparto de tortas, alfajores y chocolates como algunas de medida de longitudes, pesos y capacidades resultan pertinentes si se eligen convenientemente.

En clases anteriores nos referimos a los “problemas” como desafíos cognitivos. De modo más amplio, en nuestro análisis utilizaremos el término “situación” para hablar del conjunto de interacciones que pueden establecerse entre el alumno y el medio a propósito de la resolución de un problema. En particular, en la clase este medio estará compuesto por el problema, las resoluciones del alumno y las intervenciones de los otros alumnos y del docente.

La idea de desafío cognitivo está asociada a la posibilidad de enfrentar a los alumnos a la producción de resoluciones propias y originales. En esta instancia, los alumnos construyen procedimientos diversos apoyándose en conocimientos anteriores para arribar a sus respuestas. En algún momento, estos procedimientos pueden revelarse como ineficaces, por ser largos, costosos, etc., por lo cual el alumno tendrá la necesidad de modificarlos. Las soluciones de los alumnos no deberían surgir como respuesta a una demanda del docente, sino que se trata de que ellos se sientan responsables del resultado que buscan alcanzar.

Para centrarnos en el tema de estas clases (la enseñanza de las fracciones), antes de seguir avanzando consideremos estas situaciones.

Situación 1

a) Hoy Juan llevó a la escuela 3 alfajores iguales. Los quiere repartir entre sus 4 amigos. Quiere darles a todos la misma cantidad y no quiere que sobre nada. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

b) Hoy Juan trajo 5 chocolates iguales y los quiere repartir entre 3 de sus amigos. Cada uno tiene que recibir la misma cantidad y no quiere que sobre nada. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Situación 2 (Ilustración extraída de *Cuaderno para el aula. Matemática 5*, p. 54)

Actividad opcional

Invitamos al lector a hacer un primer análisis de las dos actividades. Con ese fin, indique:

a) ¿En qué grado/s las incluirían? ¿En qué contextos se presenta la noción de fracción? ¿Qué significados de las fracciones se abordan? ¿Qué procedimientos de resolución podrían desplegar los alumnos?

b) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las dos situaciones presentadas?

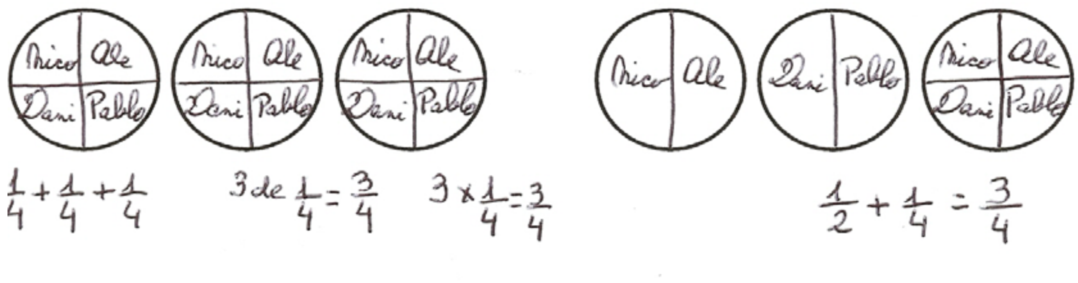
Se recomienda tomar en cuenta lo visto en las clases anteriores.

La anticipación que el docente realice de los distintos procedimientos que podrían desplegar los alumnos es también fundamental para realizar la selección ya que, no solo deberá prever si los conocimientos previos de sus alumnos les permitirán abordarlas sino también qué discusiones se podrían promover.

Dado que en los ejemplos se trata de situaciones de reparto, es conveniente presentarlas luego de haber trabajado con los alumnos problemas de división con números naturales.

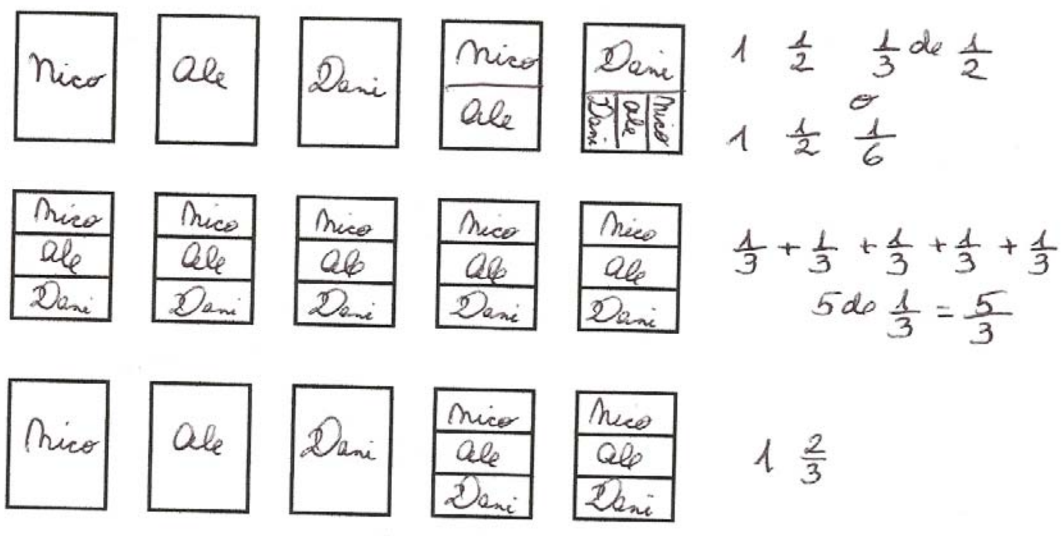
Los procedimientos podrían ser, en este ejemplo, gráficos o numéricos, pertinentes o no, más o menos costosos, más o menos económicos. Veamos algunos ejemplos.

En la primera situación, es posible prever que los alumnos para repartir 3 alfajores iguales entre 4 amigos realicen procedimientos como los siguientes.



Como puede observarse en estos procedimientos, si bien las respuestas son equivalentes, están expresadas de diferentes maneras, lo que permitiría discutir sobre el hecho de que 2 de 1/4 es lo mismo que 1/2.

En la segunda situación –en la que se repartían 5 chocolates entre 3 personas– es probable que aparezcan respuestas como las que siguen:

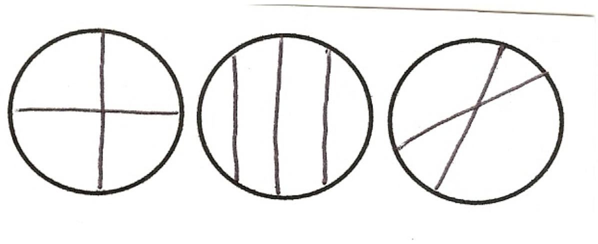


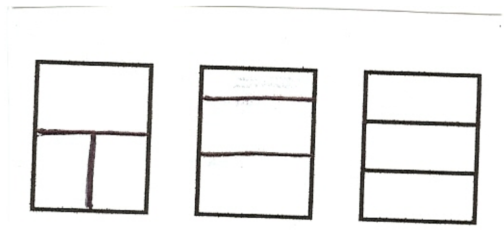
Esta variedad de procedimientos y escrituras permite discutir el hecho de que cuando las fracciones son mayores que la unidad, admiten dos escrituras: 5/3 o 1 2/3. También permite llamar la atención acerca de que 1/3 de 1/2 es lo mismo que 1/6, o bien que 1/2 + 1/6 es lo mismo que 2/3.

Vemos que, a diferencia de lo planteado en la Clase 7 sobre la organización de la enseñanza tradicional, en estas situaciones aparecen de manera simultánea fracciones propias (menores que la unidad), fracciones impropias (mayores que la unidad), y números mixtos.

Si analizamos en detalle la consigna, podemos reconocer ciertas restricciones: “Quiere darles a todos la misma cantidad y no quiere que sobre nada”. Demuestran la intención de que se realice un reparto equitativo hasta el último “pedacito”. Esto da lugar a diferentes acciones en relación con la forma de hacer la división, según se pone de manifiesto en los ejemplos analizados: repartir cada alfajor o chocolate entre todos los chicos, o repartir primero mitades o tercios y luego lo que sobra.

Con respecto a la forma de hacer el reparto, también es posible comentar el tipo de representación que podrían hacer los alumnos. Además de anticipar que, por tratarse de alfajores y chocolates, harán “círculos” y “rectángulos” subdivididos de distintas maneras, podemos suponer que aparecerán en las producciones otras formas de dibujar las partes, diferentes a las ya presentadas. Es muy probable que algunos chicos realicen dibujos como los que aparecen a continuación; esto permite anticipar la discusión en el momento de la puesta en común acerca de la necesidad de que las partes sean equivalentes y acerca de la equivalencia de las partes que tienen distinta forma.





La presentación de la situación en el aula

También habrá que planificar la presentación de la propuesta al grupo de alumnos: ¿cómo se dará la consigna?, ¿cómo se organizará el grupo?, ¿qué materiales serán necesarios y cómo se hará el reparto de estos?

¿Qué alternativas se pueden pensar para plantear la consigna?

Una cuestión central al presentar el problema es que los alumnos “entren” en él y se “hagan cargo” de su resolución. Además, teniendo en cuenta que este proceso es individual, habrá que cuidar que eso ocurra para todos los alumnos.

Es habitual que el docente entregue una fotocopia con la consigna o señale la página de un libro, luego pida a un alumno que lea en voz alta el enunciado y finalmente pregunte al grupo si lo entendió. Frecuentemente, esta lectura es seguida solo por algunos.

Una alternativa coherente con la propuesta que desarrollamos es que cada alumno lea la consigna de manera individual y luego el docente pregunte si alguien no entendió. A partir de la cantidad de dudas que surjan, será posible determinar si es necesario explicarla para todos o reunir solamente a los que no la entendieron, mientras los otros empiezan a trabajar. También se podría pedir a un alumno que, luego de la lectura individual, explicara en qué consiste la actividad, con la aclaración de que no hay que decir “cómo se resuelve”, sino contar “qué dice el enunciado”. Otra opción puede ser que el docente copie el enunciado en el pizarrón, lea y comente de qué se trata, aclare cuestiones relativas al vocabulario y luego pregunte si hay algo que no se entiende.

En todos los casos, al dar la consigna, tratará de no dar pistas de “lo que conviene hacer”, para no validar ningún procedimiento en voz alta. Ciertas reglas del trabajo en el aula, como “anoten en las hojas para que después entendamos cómo lo pensaron” o “hay distintas formas de hacerlo”, pueden ser explícitamente recordadas.

Así, estas reglas irán formando parte del nuevo contrato didáctico, en el que el alumno esperará que el docente le presente situaciones que puedan resolverse con diversos procedimientos y sabrá que debe dejar huellas de cómo resolvió la situación, porque esto le permitirá fundamentarlo en un debate posterior.

Si se trata de un juego, el docente puede presentarlo con una explicación general a la clase, jugando con un alumno para que todos observen cómo se hace. En estos casos, no es necesario terminar la partida, ya que una vez entendida la dinámica del juego, es posible reconocer “quién gana”. Si el juego es simple, es conveniente plantear la lectura del instructivo y que comiencen a jugar. Cuando se trata de un juego ya conocido, pero con un cambio del material o de las reglas, el docente puede señalar estas diferencias.

Qué alternativas se podrían plantear para la organización del grupo?

La forma de organizar el grupo se vincula con la decisión didáctica respecto de las interacciones entre pares que se pretende establecer y cómo maximizar los intercambios de cada alumno con el medio.

En las clases “habituales”, es bastante común observar que los alumnos resuelven los problemas de manera individual y, a veces, los que terminan antes ayudan a sus compañeros. Luego, el docente corrige los trabajos o suele proponer un espacio de corrección colectiva. En esta clases, la confrontación de ideas no es promovida y las relaciones que se establecen son más bien asimétricas (“el que sabe con el que no sabe”).

Detengámonos en el análisis de las posibilidades que se abren cuando se trabaja en pequeños grupos desde la perspectiva que proponemos. La interacción con los pares favorece la confrontación y el intercambio entre diferentes enfoques y la comunicación de procedimientos y resultados entre los integrantes. En este intercambio es importante tener en cuenta que las primeras respuestas de unos alumnos pueden funcionar como punto de apoyo para otros, es decir, que estos últimos no solo tengan en cuenta el problema, sino también las primeras respuestas dadas por sus compañeros. De esta manera, se fomenta la descentración y la coordinación de distintos puntos de vista. El trabajo en pequeños grupos ofrece mayores posibilidades de interacción, ya que en ese interjuego, a partir de errores y sucesivas reconstrucciones, se arriba a mejores resultados.

Cabe destacar que en el trabajo grupal a veces los alumnos pueden asumir diferentes roles. Por ejemplo, mientras algunos participan de un juego, otro es el encargado de registrar las respuestas, o bien de "cantar" mientras otros marcan en sus tableros. Se trata de reconocer qué actividad matemática desarrolla cada uno desde su lugar y, en ese caso, ir alternando los roles entre los integrantes de los equipos.

Aprender a trabajar en grupos no es sencillo y lleva su tiempo. El docente debe ofrecer condiciones para que dicho trabajo se desarrolle. Así, se posibilita a todos y cada uno de los alumnos una "actividad matemática" con mayor número de intercambios y se produce un corrimiento del maestro de la posición del único capaz de validar las respuestas.

Si bien a veces los grupos se forman espontáneamente, en ciertas ocasiones la decisión debe ser tomada con intención didáctica. Al considerar la posibilidad de formar los grupos con alumnos de conocimientos más homogéneos o más heterogéneos, muchos docentes prefieren la segunda opción para que –como ya planteamos– "los que más pueden ayuden a los que más les cuesta". En este sentido, habrá que construir criterios acerca de la relación entre el propósito de la actividad y los conocimientos involucrados en ella. La conformación de grupos con conocimientos más homogéneos puede ser conveniente cuando, por ejemplo, estamos apuntando a la memorización de cierto tipo de cálculo para que "no gane siempre el mismo". Los grupos más heterogéneos pueden ser fértiles, por ejemplo, para que aparezcan variados procedimientos.

Otro tema a pensar es el de la cantidad de niños por grupo. Muchos docentes piensan que es conveniente armar menos grupos para tener un mayor control sobre lo que hacen, porque, según suelen decir: "Si son muchos grupos, no puedo saber lo que pasa en cada uno".

Si bien no se trata de dar normas generales –pues el criterio para decidir depende de cada situación–, es importante que cada alumno no tenga que esperar mucho para intervenir, porque esto da lugar a la desconexión con la tarea.

El espacio disponible y el mobiliario del aula es un condicionante importante a la hora de definir los grupos. En una misma hora de clase puede promoverse un trabajo en forma individual, en parejas, en grupos de cuatro alumnos. Solo una organización flexible del espacio, que se adapte fácilmente, puede posibilitar estas distintas modalidades de trabajo.

En la primera situación que analizamos, podría plantearse la realización del reparto de manera individual y luego una discusión en pequeños grupos sobre la tarea realizada para comprobar si llegaron a no a la misma respuesta. En la segunda situación, en el enunciado la organización está planteada en parejas, pero también podría pensarse en grupos más numerosos.

¿Cómo seleccionar los materiales necesarios para la realización de la propuesta, qué uso darles y cómo repartirlos?

En el caso de que sea necesario utilizar un material que complemente el enunciado, su selección no será un tema menor, pues determinará los conocimientos que se pondrán en juego en los procedimientos que realizarán los alumnos.

No se trata de pensar en un material sofisticado. Muchas veces los dados, las tarjetas con números, las cartas comerciales u otras con números o figuras determinadas preparadas por el maestro dan lugar a que se planteen muy buenos "problemas matemáticos", en la medida en que el docente tenga en claro el objetivo de la propuesta.

Para el caso de las fracciones, queremos señalar dos cuestiones. La primera es que no es necesario realizar fraccionamientos reales de pizzas, chocolates o papeles que los representen. Frente a problemas como los de la situación 1, tampoco es necesario incluir los dibujos. De este modo, los chicos realizarán las representaciones que consideren pertinentes según cómo vayan pensando el reparto.

La segunda cuestión se vincula con el tipo de representación de la fracción que se incluye entre los materiales para realizar distintos juegos: podrá ser una superficie, una longitud o solo los números.

Como dijimos, la elección de utilizar o no materiales como parte del problema y, en caso de que se decida utilizarlos, sus características dan lugar al empleo de diferentes conocimientos y, por ello, también a diferentes aprendizajes. Esto constituye una variable didáctica del problema. Sobre esta noción –de mucho interés para los maestros– volveremos en las Clases 10 y 11.

Por otra parte, es necesario advertir sobre los inconvenientes que pueden derivar de un uso de los materiales dirigido en forma inadecuada. Para la primera situación analizada antes, supongamos que un docente decide darle círculos a cada alumno o grupo de alumnos, les indica por dónde cortar en cada caso y luego les pide que escriban cuánto le toca a cada amigo y que anoten debajo de cada círculo la fracción “que corresponde”. En este caso, todos los alumnos harán el mismo reparto y es probable que escriban las mismas fracciones, por lo que arribarán a la misma respuesta. El problema inicial se redujo a indicar qué fracción representa cada parte de círculo. Por lo tanto, lo que podría proponerse como una actividad intelectual se transformó en una mera actividad empírica sobre un material propuesto por el docente.

El Ministerio ha elaborado un material llamado *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender*, compuesto por un cuadernillo de recortables para los alumnos y otros cuadernillos destinados a los docentes, que pueden encontrarse en todas las escuelas del país. Este material contiene varios juegos para el tema fracciones. También está disponible en Internet:
http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/

Muchos libros de texto actuales proveen materiales recortables. Es importante organizar su preparación y conviene estar atento a la posibilidad de diseñar con ellos diversas actividades.

El desarrollo de la situación en el aula: las interacciones en la producción de soluciones

Una vez iniciada la clase, ¿qué papel jugarán los alumnos, el docente y los materiales?, ¿qué interacciones se pueden producir a propósito del conocimiento en juego?, ¿qué características de la situación posibilitan estas interacciones?

Según venimos planteando, la intención es que los alumnos produzcan soluciones propias; no se trata de que busquen una respuesta para atender al deseo del docente, como una obligación impuesta arbitrariamente desde afuera. Se trata de que “entren en el juego”, vivencien la situación y se involucren en una búsqueda propia de una solución que a ellos les parezca adecuada.

Una vez involucrados, podrán iniciar una resolución y controlar si han llegado a una conclusión adecuada a la pregunta planteada. Se espera que la evolución de los conocimientos de los alumnos durante la resolución del problema y la reflexión acerca de esta se produzcan como respuesta a las exigencias del medio, y que dicha respuesta se presente como necesaria en función del saber al que se apunta.

¿Qué tipo de interacciones se podrían dar durante la resolución en relación con el problema planteado?

En la situación 1, el problema matemático planteado (repartir en partes iguales sin que sobre nada 3 entre 4 y 5 entre 3) convoca a los alumnos a actuar sobre un medio (material o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos. Los alumnos no tienen, en esta instancia, la necesidad de explicitar los conocimientos que utilizaron ni las relaciones que establecieron para resolverla. De esta manera, producen representaciones diversas.

En la situación 2 podemos distinguir dos tareas diferentes. En la primera parte, los alumnos tendrán que analizar los procedimientos propuestos por Ale y Jime para repartir 3 chocolates iguales entre 4 chicos, es decir que tienen que determinar si dichos procedimientos son válidos, a partir de su propia interpretación de la explicación que hace cada uno acerca de cómo procedió. Se trata de interactuar con conocimientos que se han comunicado, que están formulados por otros.

En la segunda parte de la consigna, se plantea como tarea decidir si son equivalentes o no ambos repartos, es decir, si 3 de 1/4 es lo mismo que 1/2 y 1/4. Esto los llevará a producir una afirmación. En la tercera parte de la consigna, tendrán que "explicar por qué", es decir, dar argumentos que sostengan la afirmación realizada. Para ello, algunos alumnos podrán apoyar sus explicaciones en dibujos, otros lo harán estableciendo relaciones entre las partes (por ejemplo "2 de 1/4 es lo mismo que 1/2" o "si a 1/2 lo parto por la mitad, tengo dos de 1/4"). De esta manera, los alumnos validarán sus afirmaciones usando distintos tipos de pruebas: "pragmáticas", en el primer caso, ya que se apoyan en la equivalencia de las representaciones; e "intelectuales", en el segundo, ya que recurren a argumentos que no se apoyan en una acción material. Luego, en la puesta en común, dichas afirmaciones serán sometidas a la consideración de los otros alumnos, que deberán desarrollar la capacidad de aceptarlas, rechazarlas u oponer otras aserciones.

Mientras los alumnos están enfrentando estas situaciones –desarrollando verdadera "actividad matemática"–, son diversas las posibles intervenciones de los docentes. Esto nos lleva a pensar: ¿qué hace el docente mientras circula? Puede releer y explicar el enunciado a un chico o grupo de chicos que no hayan comenzado la tarea o se hayan detenido, para aclararles las dudas. Si algunos están "bloqueados", puede sugerirles cómo empezar a hacer algo, por ejemplo, animándolos a realizar un dibujo.

Si los alumnos utilizaron algún procedimiento muy costoso y largo, y si la tarea implica usar procedimientos que ya fueron objeto de discusión, verá la conveniencia de animarlos a intentar otros procedimientos más rápidos. En cambio, si se trata de que usen nuevos procedimientos, esta instancia puede reservarse para la puesta en común.

Si algunos alumnos terminaron más rápido, se les puede proponer que busquen otra forma de hacerlo.

Al recorrer el aula mirando qué hacen y cómo lo hacen, el docente decide si es necesaria una intervención puntual en un grupo o si es más conveniente analizarlo en la puesta común. Selecciona, entonces, los procedimientos que se pueden discutir en esa instancia y los que quedarán pendientes para otra ocasión. Es importante que en estos momentos el docente sostenga la incertidumbre. Sus intervenciones tienen que fomentar la "actividad matemática de todos y cada uno", pero sin dar pistas sobre las respuestas ni sobre los procedimientos.

Actualmente, consideramos el estudio de los errores como una parte muy importante en el desarrollo del proceso de aprendizaje, ya que solo entendiendo qué piensa el alumno que lo produjo podremos intervenir eficazmente desde la enseñanza para que dicho error sea superado.

Frente a los errores, ya sea en el trabajo en pequeños grupos o en la puesta en común, habrá que provocar la confrontación de opiniones entre distintos chicos, o formular preguntas que problematicen la respuesta. Por ejemplo, si al comparar 1/4 con 1/5, un alumno afirma que $1/4 < 1/5$ porque $4 < 5$, el docente puede preguntar, refiriéndose a un contexto conocido de actividades anteriores: "¿Quién come más torta, el que come 1/4 o el que come 1/5?".

El origen de los errores puede ser variado; si bien algunos se deben a meras distracciones, otros están relacionados con conocimientos anteriores, como se plantea en el siguiente párrafo:

> "Su abordaje (fracciones y decimales) desembocará en un cambio fundamental con respecto a la noción de número que tienen los niños hasta el momento, ya que algunas 'certezas' elaboradas en el Primer Ciclo a partir del estudio de los números naturales, y que son válidas en ese campo numérico, se vuelven 'erróneas' cuando las quieren extender a los números racionales.
> Pasemos revista a algunos de estos cambios, ya que habrá que tenerlos muy presentes cuando planifiquemos la enseñanza: en el conjunto de números racionales, los números ya no tienen anterior y siguiente; entre dos números racionales ya no hay un número

finito de otros números; no vale como método de comparación de racionales analizar la cantidad de cifras de los mismos; la multiplicación solo en algunos casos puede ser interpretada como una suma reiterada; el producto de dos números racionales, en muchos casos, es menor que cada uno de los factores; el resultado de una división puede ser mayor que el dividendo".

Cuaderno para el aula. Matemática 4: 49.

Algunos errores pueden ser constitutivos del conocimiento al que se apunta. Por ejemplo, si se extendieran relaciones válidas en el campo de los números naturales al campo de los racionales, los alumnos podrían pensar que:

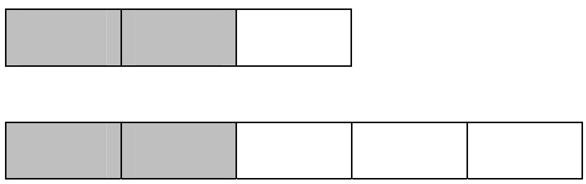
$2{,}70 > 2{,}7$ $\qquad$ $0{,}45 + 0{,}55 = 0{,}110$ $\qquad$ $2{,}13 > 2{,}4$

Si estos errores se reproducen sistemáticamente en situaciones similares, ponen de manifiesto la existencia de una incorrecta comprensión del concepto.

"Muchas veces, cuando los alumnos de 4° o 5° año/grado aprenden reglas para comparar fracciones, para simplificarlas, para pasar de una fracción a número mixto, para escribir un número mixto como fracción y también para operar con fracciones o con decimales, las olvidan después de un tiempo. Los niños se confunden, pierden la posibilidad de aplicar esas reglas a la resolución de problemas y difícilmente se vuelven aprendizajes útiles para adquisiciones posteriores."

Cuaderno para el aula. Matemática 4: 49.

Otros errores pueden estar relacionados con ciertas prácticas muy arraigadas en el aula. Por ejemplo, en el trabajo habitual, los alumnos suelen utilizar la regla para representar las fracciones y asignarle un centímetro a cada parte.



Estas representaciones pueden derivar en un error cuando los alumnos tienen que comparar fracciones, ya que a partir de estas representaciones se podría concluir que 2/3 y 2/5 son equivalentes, puesto que está coloreado lo mismo, si no se toma en cuenta que para la comparación debe considerarse el entero.

Actividad opcional

Indague sobre otros posibles errores de los alumnos en el aprendizaje de las fracciones y de los decimales, a partir de algunas producciones de los alumnos en sus cuadernos o de los comentarios de docentes.

El cierre de la actividad: las interacciones en la instancia de puesta en común y el debate

Como vimos, las dos propuestas analizadas dan lugar a que los alumnos pongan en juego sus conocimientos durante la resolución, ya sea a través de acciones (en la situación 1) o analizando procedimientos de otros, produciendo afirmaciones y argumentando sobre la validez de estas (en la situación 2). Luego, se lleva a cabo la reflexión acerca de lo realizado; es por esto que el docente organiza y dirige la puesta en común y el debate. Promover la explicitación de los conocimientos utilizados de manera implícita les permite a los alumnos seguir avanzando en su aprendizaje.

Tal vez el momento más difícil para el docente sea el de organizar la puesta en común y el debate, es decir, crear un espacio de intercambio para que el grupo compare los procedimientos y saque conclusiones a propósito de lo realizado avanzando hacia la descontextualización del contenido. Como señala Brousseau:

> "[...] [se trata ahora de] describir lo que ha sucedido y lo que tiene una relación con el conocimiento al que se apunta, dar un status a los acontecimientos de la clase, como resultado de los alumnos y como resultado del docente, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, relacionar esas producciones con los conocimientos de los otros (culturales, o del programa), indicar que ellos pueden ser reutilizados".
>
> Brousseau, 1988: 74.

Es común que luego de una variada producción de procedimientos, el docente proponga a la clase una conclusión que implique un "salto" respecto de los conocimientos que muchos alumnos utilizaron en sus resoluciones. Esto no les permite establecer relaciones entre lo trabajado y lo nuevo.

Es bastante frecuente también que la tarea de “sacar conclusiones” quede a cargo de los alumnos, lo que resulta complejo, dado que la mayoría de ellos no lo hace de manera espontánea.

En otras ocasiones, algunos alumnos exponen sus opiniones sin llegar a confrontarlas, o todos “muestran” cómo pensaron el problema reiterando procedimientos, y de esta manera la clase se vuelve tediosa.

Asimismo, es usual que las puestas en común se conviertan en una corrección colectiva, que consista en analizar si los resultados fueron correctos o no.

Para organizar la puesta en común, el docente tendrá que tener en cuenta su propósito inicial y el análisis didáctico que realizó previo a la clase, que incluye los posibles procedimientos. Además, considerará lo que sus alumnos efectivamente produjeron en los distintos momentos de interacción con el problema y con sus compañeros. Todo esto lo llevará a preguntarse: ¿qué procedimientos elegir para la discusión?, ¿qué discusiones promover?, ¿hasta dónde podremos avanzar en relación con el conocimiento al que se apunta? En función de lo observado en la clase, el docente elegirá entre diferentes opciones.

En la primera situación vista, podrá centrar la puesta en común en analizar, comparar y explicitar procedimientos acertados y errados, poniendo en evidencia las relaciones que se establecieron para resolver la situación. También podrá analizar dos o tres procedimientos, para establecer en qué se parecen y en qué se diferencian, discutir si son “matemáticamente distintos”, si ambos son pertinentes, cuál es más económico, etc.

En la segunda situación, el debate se centrará en los argumentos que muestren la validez de las afirmaciones de los niños.

En general, ¿cuáles serían “buenas intervenciones del docente”? Y ¿qué actitud debería asumir para organizar el intercambio?

En principio, podemos decir que buenas intervenciones serían aquellas que ayudaran a hacer explícito lo implícito y a establecer relaciones entre las diversas producciones. Por ejemplo, ¿cómo creen que pensó...?, ¿por qué creen que...?, ¿dónde encuentran... en ese procedimiento?

La organización del intercambio debe procurar el debate entre diferentes puntos de vista de los alumnos, dar lugar a que expliquen cómo lo pensaron, a que pregunten a otro cómo lo hizo o por qué lo hizo de tal modo. Debe además promover el diálogo entre ellos, de manera que dirijan la explicación a sus compañeros y no solo a sí mismo, y que no consideren el error como ausencia de conocimiento.

Durante este trabajo, es conveniente que el docente no valore los procedimientos en términos de mejor o peor. A veces, podrá hacerse cargo de la escritura de los procedimientos que relatan los alumnos, en lugar de que ellos pasen a escribirlos, y también podrá promover el análisis de procedimientos más avanzados que los producidos en la clase, no para que todos los dominen, pero sí para que los conozcan e intenten comprenderlos.

En síntesis, en este momento el docente promueve y organiza el intercambio a propósito del conocimiento, formula preguntas (nuevos problemas), amplifica buenas intervenciones, reformula y hace síntesis parciales.

Con relación a los alumnos, podemos esperar que se involucren en la discusión, expliciten cómo pensaron y avancen en la necesidad de validar lo producido, que se preocupen por hacerse entender y convencer a sus interlocutores y no solo al docente, que no sientan la necesidad de esconder el error por temor a las posibles burlas de sus compañeros.

En esta instancia, los alumnos, partícipes de un intercambio de ideas vinculadas con lo realizado, confrontan diferentes modos de proceder respecto de una misma problemática, defienden el propio punto de vista en una situación, producen argumentos que tal vez no elaborarían si solo tuvieran que convencerse a sí mismos de la validez de sus producciones. Estas situaciones favorecen la evolución de sus conocimientos, a la vez que se hacen más reconocibles en tanto “objetos matemáticos”.

Pero, como ya planteamos, además de organizar el debate y la puesta en común, también es tarea del docente elaborar o promover la elaboración colectiva de una síntesis de lo realizado y de las conclusiones alcanzadas. Es necesario establecer relaciones entre las conclusiones de la clase y el conocimiento matemático al que se pretende llegar.

> “¡El rol del maestro también consiste en institucionalizar! La institucionalización se realiza tanto sobre una situación de acción –se reconoce el valor de un procedimiento que se convertirá en un recurso de referencia– como sobre una situación de formulación. Hay formulaciones que se conservarán (‘Esto se dice así’, ‘Aquellas merecen ser recordadas’). Lo mismo sucede con las pruebas: es necesario identificar lo que se retendrá de las propiedades de los objetos que hemos encontrado.
>
> [...] La consideración ‘oficial’ del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro es un fenómeno social muy

importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la INSTITUCIONALIZACIÓN."

Brousseau, 1988: 74.

No se trata de pensar en la institucionalización como un momento que ocurre al final de la clase, sino como aquel en el que el conocimiento pasa a ser "aquello que habrá que recordar a futuro". Podrá hacerse institucionalizaciones parciales, o bien, si la resolución llevó más tiempo que el esperado, podrá plantearse al comienzo de la clase siguiente. Esos nuevos conocimientos –considerados "oficiales" por parte de ese grupo de alumnos– se convertirán en conocimientos de base para nuevas situaciones.

Actividad obligatoria

Imagine que en una capacitación usted pretende discutir algunas de las ideas o nociones didácticas que se abordaron en esta clase. Para esto, le pedimos que:

a) Seleccione seis ideas o nociones didácticas que le interesaría trabajar y elija una de las dos situaciones de esta clase que le permitiría abordarlas.

b) Escriba seis párrafos, uno asociado a cada una de las ideas o nociones que pretende trabajar. En ellos explicite qué se podría discutir en la capacitación al respecto y a qué conclusiones se podría arribar.

Referencias bibliográficas

ALAGIA, H., A. BRESSAN y P. SADOVSKY (2005), *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

BROUSSEAU, G. (1988), "Los diferentes roles del maestro", en Parra, C. e I. Saiz (comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

BROUSSEAU, G. (1986), "Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática". (traducción de FAMAF, UNC).

CHARNAY, R. (1994), "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra, C. e I. Saiz (comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

CHEMELLO, G (coord.), M. Hanfling y V. Machiunas (2001), *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender. (Material para docentes y recortable para alumnos)*. Buenos Aires: Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. Disponible en: http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/.

CHEVALLARD, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Universidad de Barcelona/Horsori editorial.

PARRA, C. e I. Saiz (comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

SADOVSKY, P. (2005), "La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática", en Alagia, H., A. Bressan y P. Sadovsky (2005), *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.