Clase virtual Nº 5

Argumentos de la historia para un cambio de sentido en la enseñanza

Autora: Graciela Chemello, Mónica Agrasar, Silvia Chara y Analía Grippa - Equipo Áreas curriculares del Ministerio de Educación

Para comenzar

Nuestro propósito en este Módulo es generar un espacio de producción de argumentos sobre la necesidad de desarrollar en la escuela primaria una enseñanza del cálculo que tenga en cuenta las actuales necesidades de formación matemática de los niños.

Al poner el foco en el "conocimiento matemático" –como uno de los tres polos de la terna didáctica– nos pareció necesario, para el tema matemático elegido, considerar las diferencias entre los conocimientos que hoy necesitan aprender los niños y aquellos que los maestros necesitaban al transitar sus escuelas primarias. Para aportar a la comprensión de esas diferencias, no en términos de "más o menos" conocimientos sino en términos de "cuáles", nos ocupamos de ellas en la primera clase.

Es central que, como capacitadores, conozcamos los cambios propuestos y las razones que los originaron, y que podamos elaborar actividades para que los maestros puedan reflexionar sobre las dificultades de la enseñanza clásica, así como profundizar la comprensión que tienen del sentido de los cambios propuestos.

En esta clase veremos que la historia de la matemática explica el valor que tienen los algoritmos clásicos como construcción lograda en un largo proceso de mejoramiento en pos de una necesidad, y analizaremos cuales son los conocimientos implícitos en los algoritmos. Desde la concepción de matemática que sostenemos, nos parece central abordar con los maestros algunos aspectos de esta historia para discutir la idea de que todo conocimiento matemático tiene una historia de producción.

En particular, la idea de "operación con números naturales" es una construcción histórica con origen en los usos sociales de la representación de cantidades, y el cálculo que fue evolucionando hasta los números y las formas de calcular que usamos hoy. Si bien los capacitadores conocemos mucho de esta evolución, incluimos un texto breve sobre esta con referencias bibliográficas y comentarios que apuntan a las razones que le dieron lugar, a modo de material complementario. Nos parece pertinente revisar esto para poder plantear a los maestros actividades sobre las distintas formas de representar cantidades y de hacer los cálculos que hubo en la historia de la matemática.

Se trata de que los maestros puedan ver los algoritmos que conocen como algunos de los posibles, apreciar las diferencias con otros y comprender los conocimientos implícitos en esas técnicas.

También intentamos abrir entre nosotros, capacitadores, un espacio de debate acerca de las características que es posible retener en un análisis epistemológico de los procesos de producción en la historia cuando este análisis se realiza con intencionalidad didáctica. Focalizar el análisis en los procesos de producción, su sentido y resultados, es coherente con una concepción de aprendizaje que considera que es necesario hacer matemática, al poner en acción formas de trabajar con los objetos matemáticos que son propias de este campo de conocimientos.

Estas lecciones de la historia permiten fundamentar las elecciones didácticas del enfoque. En este sentido las ponemos en discusión entendiendo que este conocimiento brinda argumentos para intervenir en la capacitación.

Lecciones de la historia

Los conocimientos matemáticos producidos a lo largo de la historia han surgido y se han transformado para responder a las necesidades de las diferentes actividades que se desarrollaron en cada sociedad. Sin embargo, es usual pensar que esos conocimientos fueron creados como los hemos conocido en nuestra formación, ya que la enseñanza en general no ha mostrado esta evolución. Recorrer la historia permite conocer los contextos de producción de los conocimientos, la época y los problemas que les dieron origen, las ideas y búsquedas de las personas o los grupos que los han generado, así como las razones matemáticas y sociales de sus cambios. La matemática se verá así como una ciencia en continuo crecimiento, con un sentido particular en el marco de las actividades humanas.

Para aportar a la discusión de esta cuestión en la capacitación hemos elaborado, para el recorte temático elegido, el texto *De las representaciones de cantidades y el cálculo a las operaciones*. Si bien otros textos tomados como referencia desarrollan el tema, nuestra intención ha sido poner foco en las razones de esos cambios. La evolución de esos conocimientos, que no ha sido lineal, ha procurado avanzar desde las primeras ideas y representaciones en pos del mejoramiento de las formas de realizar las tareas matemáticas a las que se enfrentaron, en la búsqueda de técnicas comunes para tareas similares, en su reorganización para adaptarlas a nuevos requerimientos, en su sistematización para formar parte del cuerpo de los conocimientos matemáticos, en la creación de nuevas ideas con la potencia de ser modelos cada vez más generales.

Para acompañar la lectura

Antes de avanzar en esta clase, realice una primera lectura del texto *De las representaciones de cantidades y el cálculo a las operaciones* para advertir cómo nuestra matemática del número y el cálculo se deriva fundamentalmente de las matemáticas de los babilonios, hindúes y árabes, pues ellos desarrollaron símbolos y reglas de cálculo que hicieron posible tratar los problemas numéricos de manera más general.

De las representaciones de cantidades y el cálculo a las operaciones: Un recorrido de problemas y soluciones.

Consideremos ahora algunas reflexiones didácticas en relación con esta historia, reflexiones orientadas por estudios de didácticos y de epistemología didáctica que mencionaremos para que usted pueda profundizar.

✓ **Un sentido propio de la producción de conocimiento matemático es que permite anticipar el resultado de las acciones y esto puede pensarse también como una característica de la actividad matemática para la apropiación de conocimientos.**

Desde las primeras creaciones, el conocimiento matemático aportó a la vida del hombre la posibilidad de prever el resultado de las acciones sin realizarlas efectivamente. La numeración y el cálculo son construcciones culturales de gran importancia que pusieron de manifiesto esta función central del conocimiento matemático, la *anticipación*.

Controlar la cantidad de objetos de una colección mediante un registro que guarde la traza de la acción de contar uno a uno con los dedos evita dicha acción; hacer cálculos manipulando símbolos ahorra el conteo; guardar en tablas los resultados de ciertos cálculos para no repetirlos son ejemplos de la contribución que estos conocimientos hicieron, permitiéndonos avanzar en la realización de tareas cada vez más complejas.

Al pensar esta cuestión ligada al sentido mismo de la producción de conocimientos y a su modo de funcionamiento, algunos didactas la retoman en términos cognitivos cuando se refieren al sujeto que aprende (cuando está en situación de producir nuevos conocimientos para él). La posibilidad de anticipar requiere haber realizado acciones –efectivas o pensadas–del mismo tipo, y haber realizado representaciones de estas, para luego operar sobre ellas sin necesidad de repetir las acciones.

Gerard Vergnaud, quien ha estudiado la relación entre la acción en situación y la construcción de pensamiento conceptual, plantea:

> "El análisis de la actividad de un sujeto exige la consideración simultánea de tres elementos distintos y relacionados: los aspectos que caracterizan la situación, la conceptualización que el sujeto realiza de la misma (significado) y la manera como el sujeto representa dicha situación (significante).
>
> [...] Las operaciones, incluidas materiales de escritura, se desarrollan en el plano del significante pero se apoyan sobre operaciones de pensamiento, estrechamente ligadas al concepto, que no son observables."
>
> Vergnaud, 1983: 97.

¿Qué aporta esta idea en relación con la capacitación?

- Es necesario dar lugar al trabajo de producción de los maestros –situaciones nuevas para sus conocimientos anteriores– que impliquen un desafío intelectual, para que tengan oportunidad de realizar anticipaciones y representaciones propias.

- Es posible pensar con los maestros que esto es "algo de lo que hay que hacer" en la clase de la escuela primaria.

✓ **Los modos en que funcionan los conocimientos que se producen en la comunidad matemática son distintos en diversos momentos de su evolución y esto puede pensarse también en el aprendizaje.**

Al estudiar los procesos de construcción histórica de los conocimientos matemáticos como los presentados en esta clase es posible advertir muchos ejemplos de los diferentes "estados" y las diferentes funciones que esos conocimientos van teniendo a lo largo del tiempo en la actividad matemática. Al respecto veamos lo que plantea Brousseau sobre la relación entre la matemática disponible y los problemas ya resueltos y por resolver.

> "Es bastante claro para la mayoría de los enseñantes de matemática que solo la resolución de problemas puede dar cuenta que el alumno ha adquirido, al menos en parte, los conocimientos matemáticos visualizados. El campo de los problemas relativos a un conocimiento no cesa a su vez de transformarse a medida que la teoría evoluciona.
>
> Se instaura una especie de dialéctica entre la capacidad de la teoría matemática para resolver más fácilmente el stock de problemas existentes y la capacidad del stock de problemas para hacer funcionar de forma no trivial los conocimientos transmitidos. Esta dialéctica reposa sobre un equilibrio necesario entre la actividad científica que tiende a plantear nuevas cuestiones a resolver, y así aumenta el campo de problemas y de conocimientos, y la comunicación de estos conocimientos que impulsa a una mejor organización teórica que disminuye la complejidad del campo.
>
> [...]
>
> Si se considera la evolución de los conocimientos y de los conceptos matemáticos, es habitual constatar que obedece a menudo a un esquema que el funcionamiento que acabamos de exponer tiende a justificar.
>
> [...]
>
> La etapa final, aquella que pone al concepto bajo el control de una teoría matemática, permite definirlo exactamente por las estructuras donde interviene y las propiedades que satisface. Solo esta etapa le da su status de concepto 'matemático' y lo protege de ambigüedades y de los 'errores', pero no de retomarlo y de dejarlo de lado.

Esta etapa es generalmente precedida por un período donde el concepto es un objeto, familiar, reconocido, nombrado, del cual se estudian las características y las propiedades pero que todavía, por diversas razones, no se ha organizado y teorizado. Así sucedió con la noción de función en el siglo XIX o la de ecuación en el XVI, o la de variable en el XX. El funcionamiento y el rol de esos conceptos 'paramatemáticos' es bastante diferente del de los conceptos matemáticos. Los primeros son más bien herramientas y los segundos, objetos en el sentido en que los entiende R. Douady en su tesis.

Pero se puede decir también tomando 'el punto de vista más formal', más 'sistémico', que en ausencia de estatus matemático manifiesto, los términos utilizados son herramientas que responden a necesidades de identificación, de formulación y de comunicación, y que su uso reposa sobre un control semántico. Los matemáticos los utilizan bien, no porque posean una definición que daría sobre ellos un control 'sintáctico', sino porque 'los conocen bien' y que no ha aparecido en este tema ninguna contradicción que obligaría a matematizarlos más. Este uso paramatemático corresponde a una cierta economía de organización teórica, y entonces de economía para la comunicación, la enseñanza y la resolución de problemas. Es muy aceptable en tanto que no aparezcan dificultades: contradicciones (los fundamentos de la matemática al final del siglo XIX) o un campo semántico demasiado extendido (como por ejemplo el concepto de probabilidad precisamente antes de Kolmogorov). Pero la etapa paramatemática de un concepto es probablemente precedida por otra que Y. Chevallard ha propuesto llamar 'protomatemática'.

[...]

Se trata entonces de una cierta coherencia en las preocupaciones de los matemáticos de una época, de puntos de vista, de métodos, de elección de cuestiones que se articulan muy netamente en un concepto hoy identificado pero que, en esa época, no lo era."

Brousseau, G. 1986: 30-31.

Recomendación de lectura

En su tesis, "Relación enseñanza aprendizaje. Dialéctica herramienta-objeto y juego de marcos", Regine Douady caracteriza dos estatus de los conocimientos matemáticos. Estas caracterizaciones y las formas de nombrarlas forman parte desde entonces del conjunto de conceptos propios de este campo de conocimiento.

Relación enseñanza aprendizaje. Dialéctica herramienta-objeto y juego de marcos, de Regine Douady.

En el caso del tema que estudiamos, en una primera instancia, la tarea de representar cantidades discretas de elementos da lugar a un registro en el que están implícitos algunos aspectos de la noción de número natural. Por ejemplo, al elegir marcas para cada elemento o conjunto de elementos que se cuentan, y utilizar un sistema aditivo para representar cantidades, podemos suponer que, en la actividad del sujeto, está implícita la idea de correspondencia y un funcionamiento que podemos caracterizar como "protomatemático". Es decir que al irse constituyendo el significado del número natural como memoria de la cantidad, a partir de su uso como instrumento de la actividad matemática, se conforma como concepto "paramatemático" y sólo muchos años después Peano define en forma axiomática los números naturales como "objetos matemáticos".

¿Qué aporta esta idea en relación con la capacitación?

- Si aceptamos la idea de que la enseñanza debería centrarse hoy en la actividad matemática, es posible pensar que cada conocimiento ha de pasar de un momento en que aparece en la clase como herramienta de la actividad matemática a otro en el que se transforma en objeto de estudio. Habrá entonces que trabajar con los maestros en diferenciar en qué problemas los números naturales y las operaciones que se realizan ellos son herramientas y en cuáles, objeto de estudio.
- En las secuencias del caso de capacitación, es posible analizar en qué problemas la multiplicación es herramienta y en cuáles, objeto de estudio.

✓ **En la actividad matemática se generan representaciones de las nociones involucradas, y es posible identificar diferentes para una misma noción, en diferentes sistemas semióticos.**

Los objetos matemáticos tienen diferentes representaciones semióticas. En esta ciencia, las representaciones no solo son indespensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, ya que la manipulación de estos objetos, su tratamiento, solo es posible mediante los símbolos que se eligen para expresarlos.

Raymond Duval toma la noción de "registro de representación" para analizar la actividad semiótica en la producción matemática. Un registro es para él un conjunto de símbolos y reglas que los sujetos utilizan cuando trabajan con un objeto matemático. Cada uno de ellos admite diferentes registros, algunos más personales que cada individuo produce al interactuar con una situación y otros cuyo uso se ha estabilizado en la comunidad matemática luego de pasar por modos abandonados a favor de otros más eficientes. La evolución en los sistemas de numeración que describimos en el texto da cuenta de diferentes registros estabilizados por un tiempo y también de su proceso de cambio.

Al respecto, Duval plantea:

> "De manera más global, se puede constatar que el progreso de los conocimientos se acompaña siempre de creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos específicos que más o menos coexisten con el primero de ellos, el de la lengua natural. Así, la formación del pensamiento científico es inseparable del desarrollo de simbolismo específicos para representar los objetos y sus relaciones.
>
> Por último, desde un punto de vista más genético, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes.
>
> El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas, de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptos. A esto es necesario añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto que aumenta las capaciades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales."
>
> Duval, 2005.

¿Qué aporta esta idea en relación con la capacitación?

- Duval plantea que, en la enseñanza, se suelen presentar diferentes representaciones y el tratamiento en cada una de ellas pero que, frecuentemente, está ausente el trabajo sobre la forma de pasar de un registro a otro y el análisis de la conveniencia de cada registro en relación con la situación planteada.
- Para el caso de los sistemas de numeración, en la escuela primaria se estudian el posicional decimal y el sexagesimal por ser de amplio uso, ¿se podrá realizar lo que Duval plantea? ¿Tiene algún sentido que los maestros conozcan otros sistemas? (relación con representaciones producidas por los chicos, cómo pasar a otras representaciones)

✓ **Las técnicas se producen en base a conocimientos que funcionan para resolver tareas similares, y evolucionan cuando resultan insuficientes para las tareas que se plantean.**

La actividad matemática que se realiza en una institución puede modelizarse con la noción de praxeología u organización matemática que puede describirse mediante cuatro componentes: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. En el caso en estudio en esta clase, las operaciones con números naturales son una praxeología que implica tareas, como calcular el producto de dos números naturales, encontrar que números tienen resto *r* al dividirlos por un numero *d*, buscar todos los divisores de un número. Cada una de estas tareas puede realizarse de modos diferentes pero, en cada institución, los sujetos comparten una manera de hacerla que se ha estabilizado.

Por otra parte, cada técnica puede ser explicada para hacer inteligible su funcionamiento por un discurso que muestra su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tarea que resuelve. En el caso de calcular productos, por ejemplo, las propiedades de la multiplicación y su definición a partir de la suma permiten justificar las técnicas que se utilizan. Asimismo, la teoría axiomática (Peano) fundamenta la tecnología.

El discurso tecnológico permite además relacionar cada técnica con otras y producir unas nuevas cuando sea necesario. Porque las técnicas tienen limitaciones, permiten realizar unas tareas pero son insuficientes para otras. Así, agregar ceros a un número natural *n* para multiplicarlo por otro natural vale cuando este último es la unidad seguida de ceros pero no para dos naturales cualesquiera. Y esto es porque al hacer el número 10 veces mas grande, si esta representado en un sistema decimal posicional, cada cifra pasa a ocupar en el producto la posición que corresponde al orden siguiente.

¿Cuándo resulta necesario producir una nueva técnica? En algún momento la técnica conocida deja de ser útil, se torna costosa o insuficiente para el caso particular que se está tratando y conviene modificarla. Entonces, con un criterio de economía se ensayan distintas y nuevas formas de hacerlo para luego elegir la menos costosa y así sucesivamente. De este modo, unas técnicas mas generales van supliendo a otras de alcance local, que se tornan casos particulares de la general. Así, la técnica de agregar ceros no vale si uno de los números a multiplicar no es la unidad seguida de ceros. Se puede ver entonces cómo adaptarla para multiplicar por 20, 30 o 400, es decir con números que tienen la cifra del mayor orden distinta de 1 y ceros. Si se piensan esos números como 2 x 10, 3 x 10 o 4 x 100, se puede resolver haciendo dos multiplicaciones sucesivas, una de ellas usando la técnica conocida.

En este proceso, el algoritmo clásico para multiplicar entre sí dos números naturales, apoyado en la propiedad distributiva, vale para cualquier par de números independientemente de la cantidad de cifras y de cuáles sean estas.

Sobre el momento de trabajo con la técnica, queremos destacar dos cuestiones:

> "El momento de trabajo con la técnica completa e integra de manera natural al momento exploratorio y al momento tecnológico–teórico en el proceso. Se desprende de aquí que la debilitación de dicha dimensión de la actividad matemática crearía un abismo entre la exploración puntual y rígida de problemas por un lado y los discursos "teóricos" (justificativos e interpretativos) por otro."
>
> Chevallard, 2001: 286-288.

> "....Ya hemos dicho que una praxeología local (PL) permite plantear y resolver problemas (o, al menos, responder ante ellos) que en las praxeologias iniciales no podían ni formularse. Resulta, por tanto, que estas nuevas cuestiones problemáticas deberían constituir la 'razón de ser' que diesen sentido a la PL. Pero, paradójicamente, en determinadas instituciones matemáticas se produce el siguiente fenómeno: a medida que las praxeologías se integran para constituir organizaciones más complejas (locales, regionales y globales), la relación entre la cuestión y la respuesta tiende a invertirse hasta el punto que las razones de ser de la organización matemática (o conjunto de cuestiones problemáticas que le dan sentido) tienen tendencia a desaparecer."
>
> Chevallard, citado en Fonseca y Gascón, 2000.

¿Qué aportan estas ideas en relación con la capacitación?

- Pensando esta cuestión en relación con la institución escuela primaria, es posible describir la actividad matemática de los alumnos en una clase en la que se resuelven problemas (en el sentido del enfoque que sostenemos) como la de una comunidad que se enfrenta con una cuestión a resolver y para la que debe desarrollar una tarea. Para llevarla a cabo, los alumnos van ensayando "maneras de hacerla" hasta arribar a respuestas satisfactorias para la pregunta planteada y luego, en un debate conducido por el docente, establecen unas maneras sistemáticas de hacerla, unos pasos que van constituyendo una técnica para realizar ese tipo de tarea.

  En el caso de la tarea de calcular y desde el punto de vista de la enseñanza, si solo interesa transmitir una técnica, un criterio de economía conduce a elegir la técnica general, ya que se puede usar sin tener que decidir qué hacer cada vez, repitiendo unos pasos en forma ordenada. Es más, para ponerla a funcionar y encontrar un resultado, no es necesario conocer las razones por las que ese algoritmo es válido. Además, cuanto más general sea la técnica, se puede usar en el dominio de validez sin pensar algo nuevo para cada caso, con un único conocimiento se resuelven muchas situaciones.

Sin embargo, como se ha planteado en las Clases 3 y 4, las competencias a desarrollar hoy en los alumnos de la escuela primaria en relación con las operaciones con números naturales exceden largamente las del dominio de técnicas generales de cálculo. Para desarrollarlas, se organiza y conduce la clase para "hacer matemática" y reflexionar sobre ese hacer, a fin de explicitar los conocimientos que se utilizan y validar los procedimientos y los resultados que se obtienen. En ese marco, se entiende la producción y validación de diferentes técnicas, adecuadas a la situación y los números que intervienen.

En el espacio de la capacitación será importante debatir con los maestros sobre cuál es el sentido que hoy tiene la enseñanza de las técnicas de cálculo generales.

- La necesidad de considerar para las técnicas que se incluyan en el proyecto de enseñanza la dimensión tecnológica que articula la exploración y resolución de problemas puntuales y el uso de modelos específicos con la teoría matemática que es objeto de enseñanza.
- No descuidar la construcción de sentido de las praxeologías que forman parte del proyecto de enseñanza, pues las cuestiones problemáticas en las que se utilizan constituyen su razón de ser.

Actividad obligatoria

A. Analice la propuesta para la enseñanza de la multiplicación que se incluye en el caso de capacitación que estamos analizando: *Secuencia para completar la tabla pitagórica y Actividades complementarias* e identifique los conocimientos matemáticos que el docente necesita dominar para desarrollar estas actividades con sus alumnos.

B. Registre qué actividades podría plantear a los maestros en el encuentro presencial del caso para que puedan:

- ver los algoritmos que conocen como uno de los posibles;
- comprender los conocimientos implícitos en las técnicas;
- apreciar las diferencias entre los algoritmos clásicos y otros por las propiedades y representaciones involucradas;
- determinar qué procedimientos de cálculo necesitan y qué propiedades que los justifiquen, así como qué tipos de cálculo se incluyen en la actividades del caso.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1985). "Status de los conceptos matemáticos, 6.1.4." en *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática* [traducción: Dilma Fregona (FaMAF)]. Córdoba: Universidad de Córdoba y Centro de Estudios Avanzados, UNC.

Cerquetti, F. (1992). *Enseñar matemática en los primeros ciclos*. Buenos Aires: Edicial.

Chevallard, Y. (1995). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y.; M. Gascón y M. Bosch (2001). "La estructura del proceso de estudio. Comentarios y profundizaciones 4", en *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Universidad de Barcelona – Horsori.

Douady, R. (1983). "Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos" en *Cuaderno de didáctica de la matemática Nº 3*. París: Université Paris Diderot – Paris 7. [Traducido en Selección Bibliográfica I, Programa para la Transformación de la Formación Docente, Ministerio de Cultura y Educación, (1994). También disponible en http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady]

Duval, R. (2005). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Fonseca, C. y J. Gascón (2000). "Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivación de funciones en Secundaria", Comunicación presentada en el IV Simposio de la SEIEM, Huelva, septiembre de 2000.

Gómez Alfonso, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Ifrah, G. (1985). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza.

Vergnaud, G. (1983). "Actividad y conocimiento operatorio" en C. Coll (comp), *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid: Siglo XXI (pp. 91-104).