Clase virtual Nº4

Tradiciones de enseñanza y cambios en las prácticas

Autoras: Mónica Agrasar, Analía Crippa, Silvia Chara y Graciela Chemello. Equipo del área de Matemática del Ministerio de Educación

Introducción

En las clases de este Módulo buscamos identificar distintos factores que influyen en la modificación de las prácticas de enseñanza, así como analizar posibles intervenciones en la capacitación que favorezcan la reflexión sobre ellas mismas, atendiendo a su impacto en las trayectorias escolares de los niños.

Tal como vimos en la Clase 3, los algoritmos aún siguen traccionando la enseñanza en muchas escuelas; incluso en algunos casos en los que se deja lugar a un trabajo inicial sobre procedimientos alternativos, se exige luego conocer el procedimiento tradicional.

¿Por qué esta permanencia y este énfasis en la enseñanza de «las cuentas» clásicas?

En principio, comprender las razones que llevan a un maestro a tomar unas decisiones u otras sobre su proyecto de trabajo resulta esencial para diseñar luego propuestas de capacitación que las expliciten y permitan revisarlas y, en este sentido, en esta clase nos proponemos encontrar algunas de esas razones en nuestras tradiciones de enseñanza. Disponer de algunos elementos para reconocer las marcas de estas tradiciones en las prácticas actuales nos permitirá comprender algunas resistencias de los docentes frente a los procesos de cambio curricular y detectar nudos sobre los que es posible trabajar en situaciones de capacitación.

También será importante considerar que las concepciones de cada docente acerca de la misma matemática y de su sentido dentro la escuela obligatoria condiciona lo que cree posible y deseable enseñar. Por esta razón –y dado que ningún docente debería desatender la pertinencia y significatividad social de lo que enseña– nos detendremos primero en la consideración de la relación que se establece entre la matemática escolar y la que necesita conocer un ciudadano.

Enseñanza de la matemática y formación del ciudadano

Cuáles son los saberes matemáticos que se difunden, cómo, para quiénes y para qué son preguntas cuya respuesta varía necesariamente en distintas épocas y sociedades. Comprender que los conocimientos que se difunden están ligados con las necesidades que tienen de ellos los distintos sectores sociales y, en tiempos recientes, cómo llegan esos conocimientos a formar parte del currículum escolar nos posiciona a todos –maestros y capacitadores– en la situación de estar atentos a los cambios para reflexionar acerca de su sentido y de su impacto en las prácticas.

En 1990, el Dr. Luis Santaló, uno de los matemáticos que impactó con fuerza en la enseñanza de esta disciplina en la Argentina afirmaba:

> «La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo en que tendrán que vivir. Es decir, impartirles las enseñanzas necesarias para que adquieran las destrezas y habilidades que van a necesitar para desempeñarse con comodidad y eficiencia en el seno de la sociedad con que se van a encontrar al terminar el periodo escolar.
>
> Por esto, como el mundo actual es rápidamente cambiante, también la escuela debe estar en continuo estado de alerta para adaptar su enseñanza, tanto en contenidos como en metodología, a la evolución de estos cambios, que afectan tanto a las condiciones materiales de vida como al espíritu con que los individuos se adaptan a ellas. En caso contrario, si la escuela se descuida y sigue estática o con movimiento lento en comparación a la velocidad exterior, se origina un desfase o divorcio entre la escuela y la realidad ambiental, que hace que los alumnos se sientan poco atraídos por las actividades del aula y busquen adquirir por otros medios los conocimientos que consideren necesarios para comprender, a su manera, el mundo de la calle que perciben directamente o a través de los medios masivos de comunicación.»
>
> (Santaló, 1990)

Hoy, y aún sabiendo de sus límites y condicionantes, resulta natural hablar de enseñanza básica obligatoria.[1] Sin embargo, la ampliación de la obligatoriedad es bastante reciente y tiene consecuencias en la definición y el sentido de los conocimientos que se incluyen en el currículum. ¿Cuáles son entonces los alcances de una educación matemática válida para el mayor número posible de ciudadanos?

En relación con este compromiso social de democratizar la educación matemática, Gorgorió y Bishop plantean por una parte que este proceso puede requerir que se modifiquen estructuras consolidadas y se abandonen tradiciones, muchas veces implícitas y, por otra, que «... estos cambios no pueden iniciarse sin que tenga lugar un debate social sobre el significado de saber matemáticas en la sociedad actual, y sobre qué matemáticas se espera que sepan los ciudadanos del futuro. [...] La naturaleza cambiante de las propias matemáticas como ciencia, los avances tecnológicos y las necesidades de una sociedad cada vez más diversa nos llevan a la necesi-

[1] La tasa neta estimada de escolarización en 2001 era a nivel nacional del 98,1% para EGB1 y EGB 2; 78,4%, para EGB3 y 53,6%, para el Nivel Polimodal. Fuente: http://www.indec.gov.ar.

dad de replantearnos los objetivos de la educación matemática.» (Gorgorió y Bishop, 2000: 192 y ss.)

Cabe señalar aquí que, tal como afirma Terigi, el proceso por el que se definen los contenidos escolares se caracteriza por «... la fuerte descontextualización de los saberes y las prácticas, su adscripción a una cierta secuencia de desarrollo psicológico, su sumisión a ritmos y rutinas que permitan la evaluación y la sensibilidad a los procesos de selección de saberes a los efectos de poder que tienen en toda sociedad» (Terigi, 1999: 38).

En este sentido, y buscando precisar la significatividad y pertinencia del actual proyecto de enseñanza en el área, nos preguntamos:

¿Qué de lo que enseñamos hoy en la escuela, en relación con las operaciones con números naturales, responde a las necesidades del ciudadano de hoy?

¿A qué necesidades?

¿De qué ciudadanos?

¿Cómo percibe la sociedad el aporte de la escuela?

Para acompañar la lectura

Registre su propia percepción acerca de la significatividad social de lo que enseñamos. También sería interesante que converse informalmente al respecto con algunos maestros y que registre sus comentarios para intercambiar perspectivas con sus colegas en el próximo encuentro presencial o para anticipar posibles intervenciones en futuras situaciones de capacitación.

Si está interesado en enmarcar este análisis en un proceso histórico más amplio, lo invitamos a leer una muy apretada síntesis acerca de la circulación del saber matemático en el texto *La difusión de los conocimientos matemáticos en la sociedad*.

La difusión de los conocimientos matemáticos en la sociedad. Equipo del área de Matemática del Ministerio de Educación

Hoy, muchos investigadores y docentes coinciden en la necesidad de preparar ciudadanos que puedan enfrentar los desafíos de una sociedad que cambia cada vez más rápido y aprender a manejar la variedad y cantidad de información a la que se tiene, o se tendrá, acceso. En consecuencia, la formación matemática debería centrarse en la comprensión de los procesos matemáticos más que en la ejecución de ciertas rutinas, en el uso reflexivo de los recursos tecnológicos disponibles y la resolución autónoma de problemas complejos, incluyendo en este proceso la comunicación de los procedimientos utilizados y el análisis del campo de validez de los resultados obtenidos.

Si bien esta perspectiva está presente en todos los documentos curriculares, cabe destacar que no basta el currículum para definir las prácticas de enseñanza.

Entre otros factores que configuran las prácticas, y tal como precisa Terigi en el artículo «Sobre las características del conocimiento escolar», cuya lectura recomendamos, los contenidos de enseñanza se ajustan a rutinas que permitan su evaluación y «... lo que se evalúa no [es] el ajuste del conocimiento del alumno a los saberes y prácticas de los ámbitos de referencia del currículo escolar, sino su disposición de versiones escolares de tales saberes y prácticas» (Terigi, 1999: 41).

De este modo la concreción de una formación matemática que apunta al desarrollo de competencias como las mencionadas es interpelada, entre otras cuestiones, por la permanencia de programas de evaluación centrados en resultados que sostienen prácticas algoritmizadas para medir el rendimiento. Prácticas que, por otra parte, muchas veces se exigen como requisito para el acceso a la universidad. Esto también se sostiene en respuesta a la presión de las evaluaciones por estándares internacionales que, naturalmente, no podrían ajustarse a proyectos centrados en la comprensión y la producción matemática en entornos culturales diversos.

Cuestionando estas tensiones, Chevallard plantea que «El acto de evaluar se entiende comúnmente como algo propiamente escolar, casi como un capricho institucional, ajeno al mundo 'normal', extraescolar. [...] el 'capricho' evaluativo escolar puede fácilmente convertirse en el laboratorio de un micro-poder tiránico camuflado bajo la supuesta peculiaridad de su legítimo rol institucional» (Chevallard, 2010).

De todos modos, y aún conviviendo con estas tensiones, la perspectiva de la formación de competencias sigue abriéndose camino.

Tradiciones de enseñanza

Tal como hemos planteado en la Clase 3, cuando abordamos la problemática de la enseñanza de las cuatro operaciones básicas con números naturales, hoy tenemos en cuenta tanto los procesos que llevan a la construcción de diferentes procedimientos de cálculo como los distintos significados de las operaciones.

Por una parte, advertir la variedad de significados –en el sentido planteado por Vergnaud (1991)– que pueden ser atribuidos a una misma operación permite comprender muchas de las dificultades que evidencian los niños cuando se los enfrenta a distintas situaciones que se asumen como iguales desde la mirada del adulto. Por esta razón, hoy se propone prestar particular atención a los problemas que se seleccionan para que los alumnos se familiaricen con los usos de cada operación.

A su vez, en relación con los procedimientos de cálculo, planteamos que los alumnos y alumnas, enfrentados a la necesidad de hacer una cuenta, puedan determinar primero si se necesita un resultado exacto o aproximado, estimen el resultado y, en función del tipo de números involucrados, elijan resolver mentalmente, usando un algoritmo de lápiz y papel o la calculadora, y controlando la razonabilidad del resultado obtenido. Sin embargo, llevar adelante este desafío en las aulas no es sencillo.

Para un docente es central tener control sobre los procedimientos que usan o podrían usar sus alumnos. Si no ha explorado escrituras o procedimientos distintos de los tradicionales, o no advierte cómo utilizar las propiedades de las operaciones para generar distintos procedimientos de cálculo, puede no comprender algunas producciones de los niños o considerarlas muy distantes de lo que espera. En esta situación, no puede controlar lo que cree que debe enseñar, piensa que las recomendaciones presentes en los documentos curriculares no son adecuadas o no son pertinentes para su grupo de alumnos y retoma la presentación de un procedimiento homogéneo para todos. De este modo, puede evaluar el aprendizaje de cada alumno en relación con ese modelo y mantener el control sobre su trabajo.

Cuando en la clase se admite una variedad de procedimientos, intervenir para que cada alumno progrese a partir de lo que puede hacer resulta un desafío de mayor complejidad. A su vez, esta variedad se ve cuestionada muchas veces por las demandas de los padres y limitada por un tipo particular de resultados de aprendizaje que ha caracterizado a las prácticas escolares durante mucho tiempo.

En ese sentido, cabe preguntarnos qué tipo de análisis y profundización de los conocimientos matemáticos se requiere en las situaciones de capacitación cuando trabajamos con maestros que se han formado en otra tradición de enseñanza, cuestión que abordaremos en profundidad en la Clase 6.

La consideración de este doble abordaje, atendiendo tanto a los significados de las operaciones como a la variedad de procedimientos de cálculo, es relativamente reciente en nuestro sistema de enseñanza y muchos docentes aún no advierten la modificación sustantiva que se plantea en los actuales documentos curriculares en relación con el objeto de enseñanza.

En este sentido, resulta pertinente revisar de qué modo se planteaba el trabajo con las operaciones en distintos momentos históricos para explicitar los criterios que organizaban la enseñanza y advertir cuáles son sus diferencias.

Naturalmente, y como ocurre con cualquier área de conocimiento, los criterios que hoy ponemos en juego para seleccionar esta variedad de actividades, para un grupo dado, dialogan con otros que surgieron en distintos momentos de producción y evolución del conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje. Para advertir los matices y las tensiones de este diálogo, nos preguntamos:

- ¿Qué lugar ha tenido la resolución de problemas en las orientaciones para la enseñanza de las operaciones?
- ¿Cómo aprendían los alumnos a discernir cuándo usar o no una operación?
- ¿Qué tipo de trabajo sobre cálculo se planteaba hace unos años?

Si bien no es fácil caracterizar de manera sintética la diversidad de prácticas de enseñanza que conviven en un mismo período, hay algunas marcas muy representativas que proponemos considerar aquí. Analizaremos a continuación qué respuestas se daban a estas preguntas desde la tradición normalista en el apartado «Las marcas de los clásicos». Luego, veremos en qué medida impactó en nuestras aulas la llegada de la matemática moderna en «Las marcas de los modernos», para precisar luego diferencias con «La ‘nueva’ perspectiva», en un tercer apartado.

Para acompañar la lectura

Para nuestro análisis hemos seleccionado documentos que esperamos sean significativos para lectores en distintas regiones del país. Sin embargo resulta imprescindible contar con situaciones contextualizadas en las tradiciones de enseñanza locales para analizar en distintas instancias de capacitación. En este sentido, le sugerimos que, si no lo ha hecho antes en su experiencia profesional, comience a reunir cuadernos de clase, planificaciones, programas escolares, textos para alumnos y para docentes, para contar con ejemplos propios para su trabajo como capacitador.

Le sugerimos que anticipe sus respuestas a las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo le enseñaron a operar con números naturales? 2) ¿Qué sabe acerca de cómo aprendieron sus padres? 3) Lo que aprenden hoy los niños, ¿es lo mismo? 4) ¿Cambió el método de enseñanza o se busca enseñar otra cosa? 5) ¿Hoy se necesita otro tipo de conocimiento matemático para enseñar que el que se necesitaba hace 20 o 50 años?

Recomendación de lectura

Si le interesa ampliar este tipo de estudio, puede consultar:

Acerca de la historia de la educación en nuestro país:

Biblioteca Nacional de Maestros-Proyecto Historia de la Educación Argentina (HEA). «Reseña histórica de la educación argentina en el período comprendido entre 1850 y 1955». Disponible en: http://www.argentina.gov.ar/argentina/portal/paginas.dhtml?pagina=143

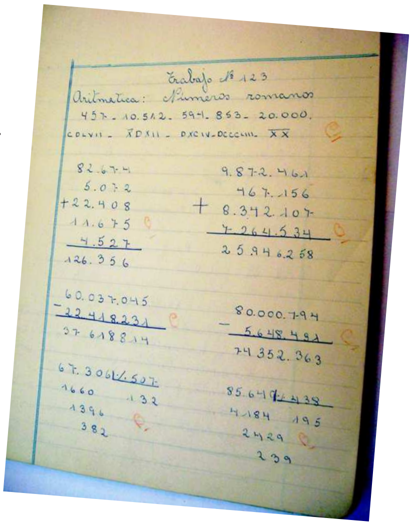
En el mismo sitio también puede acceder a fuentes, documentos y materiales digitalizados ordenados temática y cronológicamente.

Acerca de la evolución de las perspectivas sobre la enseñanza de la Matemática:

Gascón, J. (1998). «Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1 (52). Disponible en: http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/didmat_web/referencias/1.%20perspectiva/gascon_evoluciondidac.pdf

Las marcas de los clásicos

En las recomendaciones para la enseñanza presentes en textos de didáctica que circularon en las Escuelas Normales en la segunda mitad del siglo XX encontramos que, salvo el uso inicial de algún contexto como motivación, la enseñanza de las operaciones se centraba en el trabajo sobre los algoritmos, naturalizando su aplicación posterior a la resolución de «problemas», sin advertir una variedad de significados posibles para cada operación.



Cuaderno de la época.

En este texto señalaremos entre comillas la palabra *problema* para referirnos a los enunciados habitualmente presentes en los libros de texto, que podríamos caracterizar así: aluden a alguna cuestión en un contexto más o menos familiar para los alumnos, incluyen información cuantitativa, y una o varias preguntas que se espera sean respondidas a partir de analizar esa información y operar con los datos. Cuando nos referimos a un problema, sin destacar la palabra, estamos entendiéndolo como desafío intelectual en el sentido planteado por Vergnaud (1983).

En *Lecciones de Didáctica general y especial de los ramos instrumentales*, de 1941, Amanda Imperatore afirmaba, por ejemplo:

> «Cada una de las operaciones puede motivarse en forma agradable [...] La multiplicación se adquiere agrupando objetos, por ejemplo, 3 grupos de 2 botones dan 6, o 3 veces 2 dan 6, o bien, 3 x 2 = 6, el concepto abstracto equivalente. La propiedad conmutativa también puede demostrarse intuitivamente. Por ejemplo: 3 hileras de 4 botones cada una pueden convertirse, fácilmente, en 4 hileras de 3 botones y el total no se habrá alterado. Estos ejercicios se variarán y sustituirán por representaciones gráficas.
>
> La tabla de multiplicar se confeccionará en forma concreta y luego es indispensable su memorización, un tanto mecánica, para utilizarla rápidamente.
>
> La división tiene que partir de un concepto, un poco más abstracto: cuántas veces un número contiene a otro; pero, puede dársele una forma intuitiva. Por ejemplo, si tengo 4 objetos y quiero distribuirlos entre 2 personas, cuántos le corresponden a cada una. Entonces, 4 repartido entre 2, es igual a 2, o bien 4 : 2 = 2.»
>
> (Imperatore, 1941: 332 y ss.)

Así, la utilización de objetos del entorno como lápices, libros o eventualmente dibujos que pudieran contarse permitía generar las primeras experiencias con la operación. Estos «problemas» con números pequeños, en general ligados a contextos de la vida cotidiana, tenían el propósito de motivar a los niños a «adquirir la operación en forma concreta».

Veinte años después encontramos numerosos ejemplos en un *Vademécum del docente*. En particular, resulta interesante analizar la progresión que se presenta para la enseñanza de la división por 2.

Vademécum del docente de segundo grado. Buenos Aires, ROA Editores, 1967.

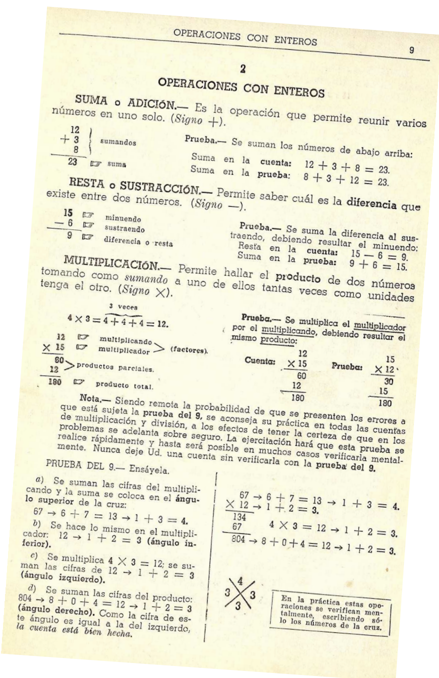
Se advierte claramente en estos documentos que el objeto de enseñanza son los algoritmos, y que los «problemas» se utilizan para presentar la operación y para su posterior aplicación.

La matemática se concibe como una ciencia cuyos resultados son limpios y claros, libres de toda discusión, ordenados, obtenidos por los sabios como consecuencia de una deducción axiomática. Para enseñar estos resultados se requiere «bajarlos» al nivel de los niños para que, mediante ejemplos y algunas manipulaciones concretas, puedan repetirlos y aplicarlos en situaciones estereotipadas, con indicios didácticos específicos.

Por medio de estas prácticas se induce al alumno a pensar que la matemática es general, abstracta, difícil por naturaleza y sin vinculación con los sujetos y las circunstancias en que esos conocimientos surgieron y avanzaron.

Cabe señalar que muchos docentes de hoy, siendo alumnos, se formaron bajo esta concepción de la disciplina y vivieron un modo de transmitirla coherente con ese modelo.

Si consultamos otra fuente, el *Manual de ingreso a primer año* de P. Berruti, cuya primera edición data de 1938 y que durante décadas marcó el perfil del egresado de 7mo grado en muchas escuelas, encontramos:


OPERACIONES CON ENTEROS 9

2

OPERACIONES CON ENTEROS

SUMA o ADICIÓN.— Es la operación que permite reunir varios números en uno solo. (*Signo* +).

12 + 3 + 8 (sumandos) = 23 (suma)

Prueba.— Se suman los números de abajo arriba:
Suma en la **cuenta:** $12 + 3 + 8 = 23$.
Suma en la **prueba:** $8 + 3 + 12 = 23$.

RESTA o SUSTRACCIÓN.— Permite saber cuál es la **diferencia** que existe entre dos números. (*Signo* —).

15 minuendo
— 6 sustraendo
9 diferencia o resta

Prueba.— Se suma la diferencia al sustraendo, debiendo resultar el minuendo:
Resta en la **cuenta:** $15 - 6 = 9$.
Suma en la **prueba:** $9 + 6 = 15$.

MULTIPLICACIÓN.— Permite hallar el **producto** de dos números tomando como *sumando* a uno de ellos tantas veces como unidades tenga el otro. (*Signo* ×).

$4 \times 3 = \overbrace{4 + 4 + 4}^{3\ \text{veces}} = 12.$

12 multiplicando
× 15 multiplicador (factores).
60
12 productos parciales.
180 producto total.

Prueba.— Se multiplica el multiplicador por el multiplicando, debiendo resultar el mismo producto:

Cuenta: 12 × 15 = 60 + 12 = 180 — Prueba: 15 × 12 = 30 + 15 = 180

Nota.— Siendo remota la probabilidad de que se presenten los errores a que está sujeta la **prueba del 9**, se aconseja su práctica en todas las cuentas de multiplicación y división, a los efectos de tener la certeza de que en los problemas se adelanta sobre seguro. La ejercitación hará que esta prueba se realice rápidamente y hasta será posible en muchos casos verificarla mentalmente. Nunca deje Ud. una cuenta sin verificarla con la **prueba del 9.**

PRUEBA DEL 9.— Ensáyela.

a) Se suman las cifras del multiplicando y la suma se coloca en el **ángulo superior de la cruz:**
$67 \to 6 + 7 = 13 \to 1 + 3 = 4$.

b) Se hace lo mismo en el multiplicador: $12 \to 1 + 2 = 3$ **(ángulo inferior).**

c) Se multiplica $4 \times 3 = 12$; se suman las cifras de $12 \to 1 + 2 = 3$ **(ángulo izquierdo).**

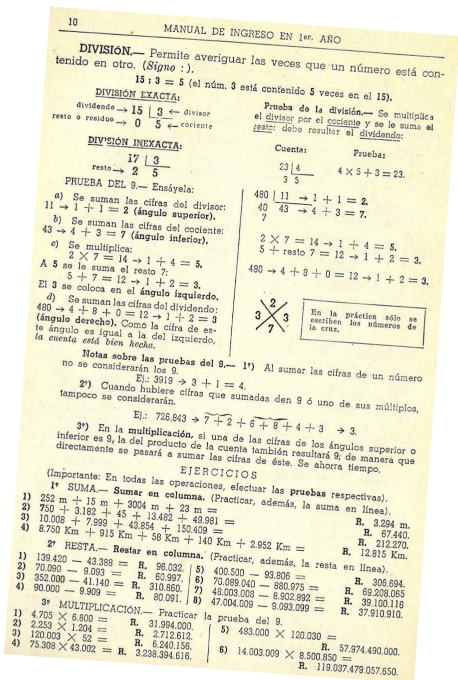
d) Se suman las cifras del producto: $804 \to 8 + 0 + 4 = 12 \to 1 + 2 = 3$ **(ángulo derecho).** Como la cifra de este ángulo es igual a la del izquierdo, *la cuenta está bien hecha.*

$67 \to 6 + 7 = 13 \to 1 + 3 = 4.$
$\times 12 \to 1 + 2 = 3.$
134
67
$4 \times 3 = 12 \to 1 + 2 = 3.$
$804 \to 8 + 0 + 4 = 12 \to 1 + 2 = 3.$

4 / 3 3 / 3

En la práctica estas operaciones se verifican mentalmente, escribiendo sólo los números de la cruz.

Fuente: Berruti, 1957: 9.


10 MANUAL DE INGRESO EN 1er. AÑO

DIVISIÓN.— Permite averiguar las veces que un número está contenido en otro. (*Signo* :).

15 : 3 = 5 (el núm. **3** está contenido **5** veces en el **15**).

DIVISIÓN EXACTA:

dividendo → 15 | 3 ← divisor
resto o residuo → 0 | 5 ← cociente

DIVISIÓN INEXACTA:

17 | 3
resto → 2 | 5

Prueba de la división.— Se multiplica el divisor por el cociente y se le suma el resto: debe resultar el dividendo:

Cuenta: 23 | 4 — 3 5 — Prueba: $4 \times 5 + 3 = 23$.

PRUEBA DEL 9.— Ensáyela:

a) Se suman las cifras del divisor: $11 \to 1 + 1 = 2$ **(ángulo superior).**

b) Se suman las cifras del cociente: $43 \to 4 + 3 = 7$ **(ángulo inferior).**

c) Se multiplica:
$2 \times 7 = 14 \to 1 + 4 = 5$.
A **5** se le suma el resto 7:
$5 + 7 = 12 \to 1 + 2 = 3$.
El **3** se coloca en el **ángulo izquierdo.**

d) Se suman las cifras del dividendo: $480 \to 4 + 8 + 0 = 12 \to 1 + 2 = 3$ **(ángulo derecho).** Como la cifra de este ángulo es igual a la del izquierdo, *la cuenta está bien hecha.*

480 | 11 $\to 1 + 1 = 2.$
40 43 $\to 4 + 3 = 7.$
7

$2 \times 7 = 14 \to 1 + 4 = 5.$
$5 +$ resto $7 = 12 \to 1 + 2 = 3.$
$480 \to 4 + 8 + 0 = 12 \to 1 + 2 = 3.$

2 / 3 3 / 7

En la práctica sólo se escriben los números de la cruz.

Notas sobre las pruebas del 9.— 1º) Al sumar las cifras de un número no se considerarán los 9.
Ej.: $3919 \to 3 + 1 = 4$.

2º) Cuando hubiere cifras que sumadas den 9 ó uno de sus múltiplos, tampoco se considerarán.
Ej.: $726.843 \to \overbrace{7 + 2} + \overbrace{6 + 8 +} 4 + 3 \to 3$.

3º) En la **multiplicación,** si una de las cifras de los ángulos superior o inferior es 9, la del producto de la cuenta también resultará 9; de manera que directamente se pasará a sumar las cifras de éste. Se ahorra tiempo.

EJERCICIOS

(Importante: En todas las operaciones, efectuar las **pruebas** respectivas).

1º SUMA.— **Sumar en columna.** (Practicar, además, la suma en línea).
1) 252 m + 15 m + 3004 m + 23 m = R. 3.294 m.
2) 750 + 3.182 + 45 + 13.482 + 49.981 = R. 67.440.
3) 10.008 + 7.999 + 43.854 + 150.409 = R. 212.270.
4) 8.750 Km + 915 Km + 58 Km + 140 Km + 2.952 Km = R. 12.815 Km.

2º RESTA.— **Restar en columna.** (Practicar, además, la resta en línea).
1) 139.420 — 43.388 = R. 96.032.
2) 70.090 — 9.093 = R. 60.997.
3) 352.000 — 41.140 = R. 310.860.
4) 90.000 — 9.909 = R. 80.091.
5) 400.500 — 93.806 = R. 306.694.
6) 70.089.040 — 880.975 = R. 69.208.065
7) 48.003.008 — 8.902.892 = R. 39.100.116
8) 47.004.009 — 9.093.099 = R. 37.910.910.

3º MULTIPLICACIÓN.— Practicar la prueba del 9.
1) 4.705 × 6.800 = R. 31.994.000.
2) 2.253 × 1.204 = R. 2.712.612.
3) 120.003 × 52 = R. 6.240.156.
4) 75.308 × 43.002 = R. 3.238.394.616.
5) 483.000 × 120.030 = R. 57.974.490.000.
6) 14.003.009 × 8.500.850 = R. 119.037.479.057.650.

Fuente: Berruti, 1957: 10.

Luego de los ejercicios, se presenta el título «Problemas» con los siguientes subtítulos: «Problemas empleando las cuatro operaciones», «Ejercicios», «Problemas de recapitulación».

Hasta aquí, en nuestro análisis, los «problemas» mantienen la función de aplicar los algoritmos y la estructura estereotipada de los enunciados, y la presencia de palabras clave (*total, quedaron, repartir*, etc.) facilitaban el reconocimiento de la operación a utilizar. Pero si se presentaba alguna situación nueva, los alumnos no podían decidir «qué hay que hacer».

En relación al cálculo, en ningún caso se plantea la consideración de procedimientos alternativos, ni se propone un trabajo sobre la técnica que explicite las propiedades que la fundamentan.

Si bien se registra un trabajo sobre las propiedades de las operaciones, en general estas se definen y aplican sin establecer vínculos con la justificación de procedimientos de cálculo más o menos eficientes.

En un texto de circulación habitual en las Escuelas Normales, editado en 1969, leemos:

«La actividad del cálculo no tiende a otra cosa que despertar habilidades para lograr la formación de hábitos. Sin embargo, los hábitos formados deben ser constantemente revisados para impedir la incorporación de formas defectuosas y fortalecer, en cambio, los procesos aritméticos adecuados y correctos.

La enseñanza del cálculo:

1) es considerado un ejercicio utilitario,
2) permite la obtención de resultados prácticos,
3) desarrolla la capacidad mental.»

(Combeta, 1969: 183)

«La enseñanza de la división debe realizarse por medio de cálculos objetivos y concretos que den idea de repartición. Sea, por ejemplo, la enseñanza de la división por 3:

1) Cálculos orales que resuelvan casos de repartición de 'objetos concretos' por partes iguales entre tres alumnos.
2) Escritura de los números integrantes de la escala del 3 hasta el 30 para ser repartidos entre 3 alumnos:

   3 repartido entre 3 =

   6 repartido entre 3 =

   9 repartido entre 3 =

   12 repartido entre 3 =

   15 repartido entre 3 =

   Etc.

3) Obtención del resultado de cada repartición.

4) Reemplazo de la palabra 'repartido entre' por 'dividido':

3 repartido entre 3 = ⟶ 3 : 3 =

6 repartido entre 3 = ⟶ 6 : 3 =

9 repartido entre 3 = ⟶ 9 : 3 =

12 repartido entre 3 = ⟶ 12 : 3 =

5) Práctica oral de las operaciones elaboradas.

6) Ejercicios de cálculos de división en disposición de escritura en línea.

7) Enseñanza práctica y objetiva de la operación de la división por el número 3, en forma gradual:

   a) caso en que el cociente resulte dígito,

   b) caso en el que el cociente resulte polidígito.

En todos los casos se debe efectuar la prueba que consiste en multiplicar el cociente por el divisor 3 y luego sumar el resto para obtener un resultado idéntico al valor del dividendo.

Al introducir la operación de la división, el maestro debe analizar cuidadosamente las fases progresivas del aprendizaje con el objeto de presentar las dificultades en forma creciente.

Iniciar con operaciones sencillas con divisor de una sola cifra, adiestrar suficientemente a los alumnos para que adquieran la adecuada ejecución de las mismas con destreza satisfactoria, introducir gradualmente las dificultades por medio del aumento de las cifras en el dividendo, es la técnica que se sugiere al maestro. No se le aconseja la solución de operaciones en donde el divisor posee más de tres cifras porque el alumno debe recibir mensajes que sean aplicables a la vida real que comparte.»

(Combeta, 1969: 189-190)

En este texto se pone en evidencia un criterio que ha sido rector de la enseñanza durante mucho tiempo: «de lo fácil a lo difícil» y que respeta la estructura axiomática de la matemática: primero se fijan unos conceptos básicos, luego se establecen ciertas propiedades y se definen nuevos conceptos y propiedades a partir de ellos.

Sin embargo, esta estructura que, para diversos campos de la matemática ha surgido en momentos históricos diferentes, resulta del trabajo de la comunidad científica que, a lo largo de los años produce, resignifica, transforma, generaliza y por último sistematiza en forma axiomática los conocimientos que genera. Es decir, la estructura axiomática aparece de un esfuerzo por ordenar y estructurar ideas y procedimientos que han surgido durante mucho tiempo a propósito de la resolución de problemas diversos, en un trabajo de sucesivos ajustes y modificaciones no exento de obstáculos y contramarchas.

Desde el punto de vista del alumno, comprender los objetos que se le presentan de este modo (discursivamente y con un ejemplo) le exigiría *saltar* el proceso de construcción progresiva que a la comunidad matemática le llevó siglos.

Por otra parte, ese discurso se transmite muchas veces cristalizado en una única representación y con un único significado (el definido formalmente con su mayor nivel de generalización) dando lugar a concepciones muy recortadas y estereotipadas de los objetos matemáticos.

Ahora bien, si lo que se busca es adiestrar a los alumnos para que ejecuten una técnica con destreza, con control del resultado (con una nueva regla como lo eran las pruebas) aún sin controlar el procedimiento, una práctica sostenida y convenientemente graduada puede lograr el fin propuesto.

Sin embargo, aún formando con ese fin, cuando la técnica deja de usarse por un tiempo se pierde muchas veces su eficiencia: si aparece un error, tal vez no se pueda determinar su origen o no se pueda estimar la razonabilidad del resultado que se obtiene, lo que muestra la insuficiencia de este abordaje.

Las marcas de los modernos

Hacia los años setenta, en nuestro país se propicia –luego de la difusión de los principios de la escuela nueva y de la psicología del desarrollo– un cambio del objeto de enseñanza.

Se busca que el niño desarrolle su capacidad para establecer relaciones y pueda resolver distintas situaciones apoyándose en la noción de conjunto, las relaciones de pertenencia e inclusión y las operaciones entre conjuntos.

La matemática moderna pretendía llevar a la enseñanza básica el método axiomático, el lenguaje lógico-simbólico y las estructuras algebraicas, a partir del impacto que había tenido la vinculación de sus ramas mediante conceptos generales y estructuras que habían servido durante el siglo anterior para unificar las matemáticas.

Entre los libros para docentes de la época encontramos:

«... el estudio elemental de los conjuntos resulta valioso para la escuela primaria por las siguientes razones:

a) pone en evidencia los fundamentos lógicos de la matemática,

b) promueve el enlace en espiral de los elementos de la matemática y facilita la visualización de las relaciones para el planteamiento de nuevos problemas;

c) se proyecta a todas las materias y a todos los ámbitos, al tiempo que se desarrolla la reflexión y la expresión en un lenguaje adecuado para cada caso.»

(Ziperovich, 1969: 46)

«Mucho más importante que brindar al alumno conocimientos, por actualizados que ellos sean, es darle formas de pensar y de actuar, habituarlo al razonamiento lógico y aun más, iniciarlo en los métodos científicos del trabajo. En síntesis ofrecerle todo aquello que le permita encontrar por sí mismo las soluciones a los problemas que se le planteen en su quehacer futuro. Más que enseñarle matemática hay que enseñarle a matematizar situaciones.»

(Tapia, 1972: 1)

Desde el Nivel Inicial se promueve el uso de los bloques Dienes, con el objetivo de desarrollar habilidades prenuméricas y establecer relaciones lógicas. Luego de asegurar la clasificación y seriación, prerrequisitos para el aprendizaje del número, se introducían los números como cardinales de conjuntos con la misma cantidad de elementos.

Bloques Dienes

Al respecto, en un documento elaborado por el Consejo Nacional de Educación en 1975 leemos:

«Según los desarrollos de la psicología Genética el concepto de número en el niño se desarrolla según estadios y comprende operaciones que son básicas. Si un niño al ingresar a primer grado no ha logrado interiorizar (realizar en el área de la mente) determinadas operaciones no podrá aprender el concepto de número (clasificación, seriación, conservación de la cantidad).

[...] El niño debe construir por sí mismo los esquemas operacionales, por eso es indispensable que cuente con material concreto para trabajar en el aula: tapitas, botones, fichas plásticas, semillas, fideos, etc.

Estas actividades se cumplirán siguiendo la secuencia:

a) Operación manual múltiple.

b) Operación gráfica (tarjetas, fichas).

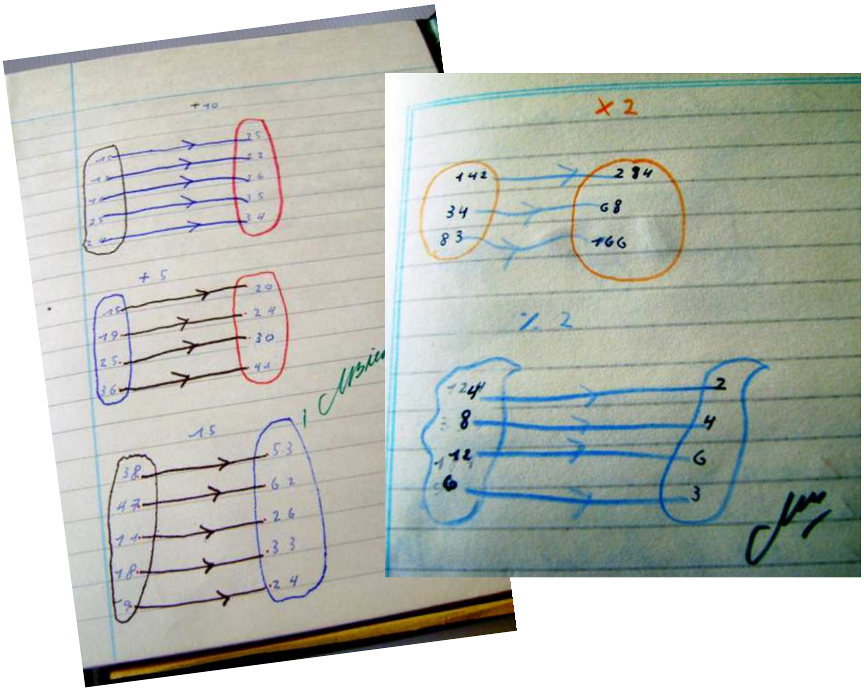
c) Operación representativa (dibujos).

d) Operación simbólica (números).»

(Ministerio de Cultura y Educación, 1975)

La suma se presentaba asociada a la unión de conjuntos y la multiplicación al producto cartesiano. Esta presentación se apoyaba con los correspondientes diagramas de Venn y algunos ejemplos. Las operaciones se interpretaban luego como operadores desde el punto de vista funcional, asociando la resta y la división con los «operadores inversos».

Para profundizar este abordaje puede consultar: Dienes, Z. P. (1969). *Estados y operadores III: Operadores multiplicativos*. Barcelona: Teide.



Ejemplos de trabajos de niños con diagramas de Venn (cuadernos de 1973).

En materiales destinados a docentes leemos:

Operaciones - Multiplicaciones

Dados dos números naturales a y b, tal que a = #A, y b = #B, se llama producto de a y b, y se denota con a • b al cardinal del producto cartesiano A • B.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} a = \#A, \\ b = \#B, \\ c = \#C \end{array}\right\} \text{ entonces } a \cdot b = c \text{ si y solo si } c = \#(A \cdot B)$$

(Gabba, 1974: 147)

Junto con los aportes de la teoría de conjuntos y las derivaciones hacia la enseñanza que produjeron los aportes de Piaget aparecen en las aulas variedad de materiales didácticos para apoyar la enseñanza del sistema de numeración y el cálculo.

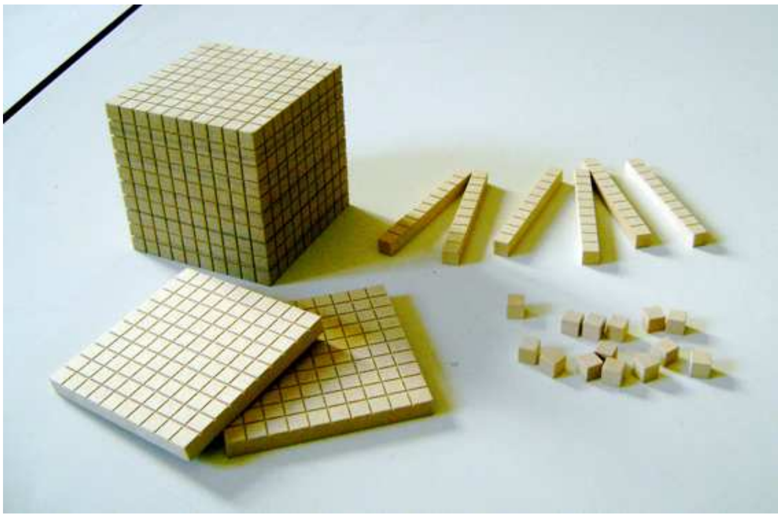
La recomendación curricular que deriva de estos aportes es ir de lo concreto a lo abstracto, de la manipulación a la representación. Por ejemplo, en un texto de los años setenta leemos lo siguiente:

Interacción entre las actividades concretas y mentales del niño en el proceso de aprendizaje

Una situación real.	Toma de conciencia de la situación.
Objetos empleados.	Atención puesta sobre las cualidades de los objetos y sus agrupamientos.
Acciones efectuadas.	
Expresión verbal por medio del lenguaje usual de las acciones realizadas y de los resultados.	Traducción al lenguaje gráfico y con palabras propias de la transformación realizada.

Fuente: *Bases para el currículum de escuelas de nivel elemental*, 1971: 167.

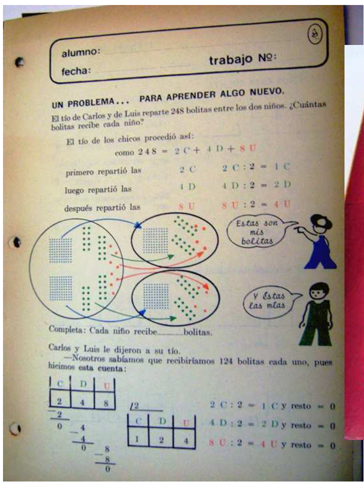
De este modo, en relación con la enseñanza del cálculo, aparece el material multibase para «concretizar» la estructura del sistema de numeración y que luego se utiliza para la enseñanza de los algoritmos



Materiales multibase.

Este trabajo podía derivar muchas veces en una manipulación que mantenía en el terreno de lo implícito la estructura del sistema decimal. Se produce así un deslizamiento en el objeto de enseñanza, ya que lo que se enseña y se aprende es a usar el material y –de no mediar otras acciones– los alumnos no pueden resolver sin él. Cuando se presentan operaciones con números más grandes, se termina enseñando el algoritmo tradicional.

Esta perspectiva buscaba resguardar la definición de las operaciones desde el punto de vista de la matemática, pero quedaba muy limitada la posibilidad de atribuir significado por parte de los niños.



alumno:
fecha: trabajo Nº:

UN PROBLEMA... PARA APRENDER ALGO NUEVO.

El tío de Carlos y de Luis reparte 248 bolitas entre los dos niños. ¿Cuántas bolitas recibe cada niño?

El tío de los chicos procedió así:

como 248 = 2 C + 4 D + 8 U

primero repartió las 2 C 2 C : 2 = 1 C

luego repartió las 4 D 4 D : 2 = 2 D

después repartió las 8 U 8 U : 2 = 4 U

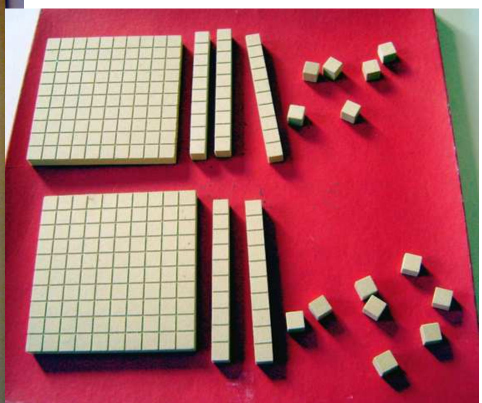
Completa: Cada niño recibe........bolitas.

Carlos y Luis le dijeron a su tío.
—Nosotros sabíamos que recibiríamos 124 bolitas cada uno, pues hicimos esta cuenta:

C	D	U
2	4	8

C	D	U
1	2	4

2 C : 2 = 1 C y resto = 0
4 D : 2 = 2 D y resto = 0
8 U : 2 = 4 U y resto = 0



Materiales multibase para los algoritmos.

Por una parte, y aunque las definiciones de las operaciones se apoyaran inicialmente en ejemplos «concretos», estas no se vinculaban luego con los problemas de aplicación, que volvían a presentarse tal como se usaban antes, sin advertir una variedad en su estructura o significado. Por otra, las definiciones de las operaciones entre conjuntos implican un nivel de generalización que excede, en mucho, las posibilidades cognitivas de los alumnos, y el esfuerzo de acercar lo abstracto por medio de la manipulación de algunos modelos resultaba poco fértil. Se esperaba que los estudiantes aprendieran conceptos abstractos alejados de sus significados, con la esperanza de que luego pudieran entender sus aplicaciones. Sin embargo, la matemática fue creada con intuiciones, intentos, aproximaciones y también fracasos sucesivos, y durante siglos fue útil aun sin necesidad de dominar las estructuras que se descubrirían en el siglo XX.

En esta etapa, si bien se modifica la consideración del sujeto alumno, se indaga para comprender los procesos por los cuales aprende. Se busca acercar la matemática al niño mediante distintos recursos; se propone el acceso a los objetos matemáticos por medio de sus definiciones, más o menos mediadas por el uso de materiales concretos, y aún se mantiene una perspectiva más realista[2] que pragmática a propósito de la naturaleza de los objetos matemáticos, pues conocerlos significa descubrir entes y relaciones que existen en un dominio ideal.

La «nueva» perspectiva

«La filosofía de la matemática actual ha dejado de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de fundamentación de la matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años treinta, para enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática (I. Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de la matemática en la cultura de la sociedad en la que se origina (R. L. Wilder), considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes. Tales cambios en lo hondo del entender y del sentir mismo de los matemáticos sobre su propio quehacer vienen provocando, de forma más o menos consciente, fluctuaciones importantes en las consideraciones sobre lo que la enseñanza matemática debe ser»

(Guzmán 1993: 100)

Es en 1995 que se explicita, a nivel nacional –desde los Contenidos Básicos Comunes (desarrollados Ministerio de Cultura y Educación de la Nación)– la necesidad de considerar para el trabajo con operaciones el significado de estas en cada conjunto numérico, las formas de calcular sus resultados y el análisis formal de sus propiedades. La inclusión de los procedimientos relacionados con el quehacer matemático –vinculados a la resolución de problemas, al razonamiento y la comunicación– como contenido de enseñanza pone de manifiesto que no es posible aprender matemática sin comprender la naturaleza del pensamiento matemático, manejando las ideas y procedimientos básicos de esta ciencia y siendo capaz de comunicarlos.

[2] El significado es «... una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; como consecuencia suponen un realismo conceptual» (Godino, Batanero, 1994).

De este modo, la enseñanza de los algoritmos se piensa en un marco más amplio en el que se busca que los alumnos comprendan y sepan usar las operaciones y relaciones entre números para resolver problemas, seleccionando el tipo de cálculo exacto o aproximado que requiera la situación presentada, y siendo capaces, además, de estimar e interpretar las resultados comprobando su razonabilidad.

Por otro lado, se señala que los alumnos deben comprender que una misma expresión simbólica puede representar una amplia gama de problemas, planteando un necesario trabajo sobre los significados. Se precisa, además, que antes del trabajo con los algoritmos convencionales es conveniente una actividad sistemática con cálculos mentales y escritos, descomponiendo y componiendo los números como totalidades (en lugar de trabajar con las decenas, centenas y unidades) y asociándolos de acuerdo a cálculos y operaciones más simples que los alumnos hayan memorizado comprensivamente y puedan controlar.

Aunque se mantienen los algoritmos tradicionales, se agrega el cálculo exacto y aproximado en forma oral, escrita y con calculadora, así como la interpretación del sentido de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos.

Si analizamos la propuesta de los NAP (Ministerio de Educación, 2005), encontramos una mayor explicitación del tipo de trabajo que se espera promover y que da cuenta de una perspectiva más pragmática acerca de los conceptos matemáticos.

Para ejemplificar el sentido de esta afirmación relea los NAP para tercero, cuarto y quinto grado. En particular, se puede focalizar en el apartado «El reconocimiento y uso de las operaciones de adición y sustracción, multiplicación y división en situaciones problemáticas». Disponible en: http://portal.educacion.gov.ar/primaria/contenidos-curriculares-comunes-nap/

> En este documento, la enseñanza de las operaciones ya no se circunscribe a los algoritmos ni los prioriza, sino que se define como una práctica compleja, cuya transmisión requiere un trabajo particular sobre los significados de las operaciones y la apertura a una variedad de procedimientos de cálculo, incluyendo el control sobre esos procedimientos.
>
> No se trata de enseñar a reproducir unos procedimientos fijos y universales bajo una única forma de escritura, sino de buscar que los alumnos participen de una actividad de producción matemática que involucra una variedad de representaciones, procedimientos y argumentos posibles.

El modo como se aprende la matemática no es solo un problema psicológico, pedagógico o didáctico, ya que el *cómo* está estrechamente ligado al *qué*: el aprendizaje matemático es un hecho que tiene que ver con la epistemología. En una visión epistemológica realista, los conceptos matemáticos son el punto de llegada ideal, mientras que en una visión pragmática, el concepto es una construcción personal que se modifica en la interacción con otros a propósito de la participación en prácticas reguladas por distintas instituciones.

Para precisar esta perspectiva pragmática, podemos citar aquí a Vergnaud cuando señala que

> «un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza. [...] Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo» (Vergnaud, 1990: 135, 158).

Esta distinción nos lleva a reinterpretar algunas «dificultades de comprensión» que pueden manifestar los alumnos en la clase de matemática. Mientras el docente cree trabajar sobre los «conceptos» mediante sus representaciones simbólicas, el alumno atribuye a estas un significado ligado a un contexto particular, que no puede vincular con lo que el maestro presenta en su discurso.

A su vez, Chevallard define un «objeto matemático del saber» como: «... un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir, lo que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos), es decir, el registro de la escritura» (Chevallard, 1991: 8).

Dado que estos registros semióticos tienen significados diferentes según sea el contexto en el que se usan, estas prácticas situadas dan lugar a lo que el mismo autor denomina «significado institucional y personal de los objetos matemáticos».

Recomendación de lectura

El lector interesado en profundizar esta perspectiva puede consultar:

Godino, J. y C. Batanero (1994). «Significado institucional y personal de los objetos matemáticos». *Recherches Didactique des Mathèmatiques*, 14 (3). Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Para precisar las teorías epistemológicas sobre las que se apoyan las distintas investigaciones sobre matemática y educación, también resulta interesante consultar:

Sierpinska, A. y S. Lerman (1996). «Epistemología de las matemáticas y de la educación matemática». En: A. J. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, HL: Kluwer. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/escorial/SIERLERM.html

Esta concepción pragmática de los objetos matemáticos, que sustenta las actuales orientaciones para la enseñanza, convive con la perspectiva más realista desde la que muchos docentes han aprendido a conocer la matemática.

Cuando esta diferencia no se advierte con claridad es difícil que un maestro sostenga un cambio en las prácticas pues, aunque asuma progresivamente un nuevo discurso, este no es consistente con la matemática que conoce y que, honestamente, es la que intenta transmitir.

Será interesante, en relación con su participación en futuras acciones de capacitación, que registre si advierte la influencia de alguna de estas «marcas» de la tradición escolar en las prácticas de enseñanza que se desarrollan hoy en las escuelas de su región. Contar con cuadernos de clase de distintas épocas también podría aportarle ejemplos para ser utilizados como material de análisis en encuentros con maestros.

Actividad obligatoria

1. Compare las actividades propuestas para la enseñanza de la multiplicación que se incluyen en el *Vademécum del docente* y en la *Secuencia para completar la tabla pitagórica* del caso de capacitación que estamos analizando.
   a. Explicite cuál es el contenido de enseñanza para cada propuesta.
   b. Identifique y registre dos supuestos sobre la enseñanza detrás de cada una de ellas.
2. A partir de lo analizado en el punto **1**, anticipe posibles obstáculos para el análisis de la propuesta para la enseñanza de la multiplicación que se incluye en el caso en el encuentro presencial. Tenga en cuenta las prácticas de enseñanza que se desarrollan hoy en las escuelas de su región y elabore un documento para enviar a su tutor que registre:
   a) 3 preguntas que podrían hacer los maestros;
   b) 3 afirmaciones que podrían hacer en relación con su viabilidad en el aula.

Vademécum del docente

Secuencia para completar la tabla pitagórica

Para cerrar este encuentro, nos despedimos retomando el planteo realizado al iniciar la clase con ideas de Paulo Freire que nos invitan a pensar sobre nuestra propia posición al respecto.

> «Creo que en el momento en que la naturalidad de las matemáticas se convierte en una condición para existir en el mundo, se está trabajando en contra de cierto elitismo que poseen los estudios de matemáticas, incluso a pesar de que los matemáticos deseen lo contrario. Esto significa democratizar la posibilidad de la naturalidad de las matemáticas, y esto es ciudadanía. Y cuan-

do se hace posible una mayor convivencia con las matemáticas no hay duda de que se contribuye a solucionar un gran número de cuestiones planteadas a nuestro alrededor, algunas veces existentes precisamente debido a una falta de competencia, incluso mínima, en la materia. ¿Y por qué no se da esa democratización? Porque se ha aceptado que comprender las matemáticas es algo profundamente refinado cuando, de hecho, no lo es ni debería serlo» (Freire, 1997).

Referencias bibliográficas

BERRUTI, P. (1957). *Manual de Ingreso en 1er año de los Colegios Nacionales, Colegios Nacionales de Señoritas, Escuelas Normales, Comerciales, Industriales, Profesionales, técnicas y de Artes y Oficios dependientes del Ministerio de Educación. Matemáticas. Castellano*. Buenos Aires: Editorial Escolar.

BLOCK, D. y M. Dávila (1995). «La matemática expulsada de la escuela». En: SEP, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Lecturas.

CHEVALLARD, Y. (2010). *¿Cuál puede ser el valor de evaluar? Notas para desprenderse de la evaluación «como capricho y miniatura»* (abstract). Conferencia inaugural Segundo Congreso Internacional de Didácticas Específicas: «Poder, disciplinamiento y evaluación de los saberes». Universidad de San Martín, Buenos Aires.

COMBETTA, O. (1969). *Didáctica especial en la educación moderna*. Buenos Aires: Losada.

CONSEJO FEDERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

D'AMORE, B. (2004). «Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución». *Uno*, 35.

D'AMORE, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Reverté.

DIENES, Z. P. (1969). *Estados y operadores III: Operadores multiplicativos*. Barcelona: Teide.

FREIRE, P., U. D'Ambrosio, M. Mendonca (1997). «A conversation with Paulo Freire». *For the learning of Mathematics*, 17 (3).

GABBA, P. (1974). *Matemática para maestros*. Buenos Aires: Marymar.

GORGORIÓ, N. y A. Bishop (2000). «Implicaciones para el cambio». En: *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: ICE-Grao.

GUZMÁN OZAMIZ, M. (1993). *Enseñanza de la Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: OEI-Editorial Popular. Disponible en http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

IMPERATORE, A. (1941). *Lecciones de Didáctica General y Especial de los ramos instrumentales*. Buenos Aires: Librería del Colegio.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN (1975). *Educación para la Reconstrucción*, 12.

Ministerio de Educación (2005). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios*. Buenos Aires.

Santaló, L. A. (1990). *Matemática para no matemáticos*. Conferencia inaugural del I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla.

Tappia de Bibiloni, N. (1972). *Aprendex matemática 6. Guía metodológica para el maestro*. Buenos Aires: Estrada.

Terigi, F. (1999). «Sobre las características del conocimiento escolar». En: G. Frigerio, M. Poggi, D. Korinfeld (comps.), *Construyendo un saber sobre el interior de la escuela*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Vademécum del docente de segundo grado (1967). Bernal: ROA.

Vergnaud, G. (1983). «Actividad y conocimiento operatorio». En: C. Coll (comp.), *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid: Siglo XXI.

Vergnaud, G. (1990). «La teoría de los campos conceptuales». En: *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, 10 (2). Disponible en: mat.uv.cl/profesores/apuntes/archivos_publicos/3914441684_campos.pdf.

Verganud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Ziperovich, R. (1969). *Enseñanza moderna de matemática*. Rosario: Biblioteca.