Clase virtual Nº 14

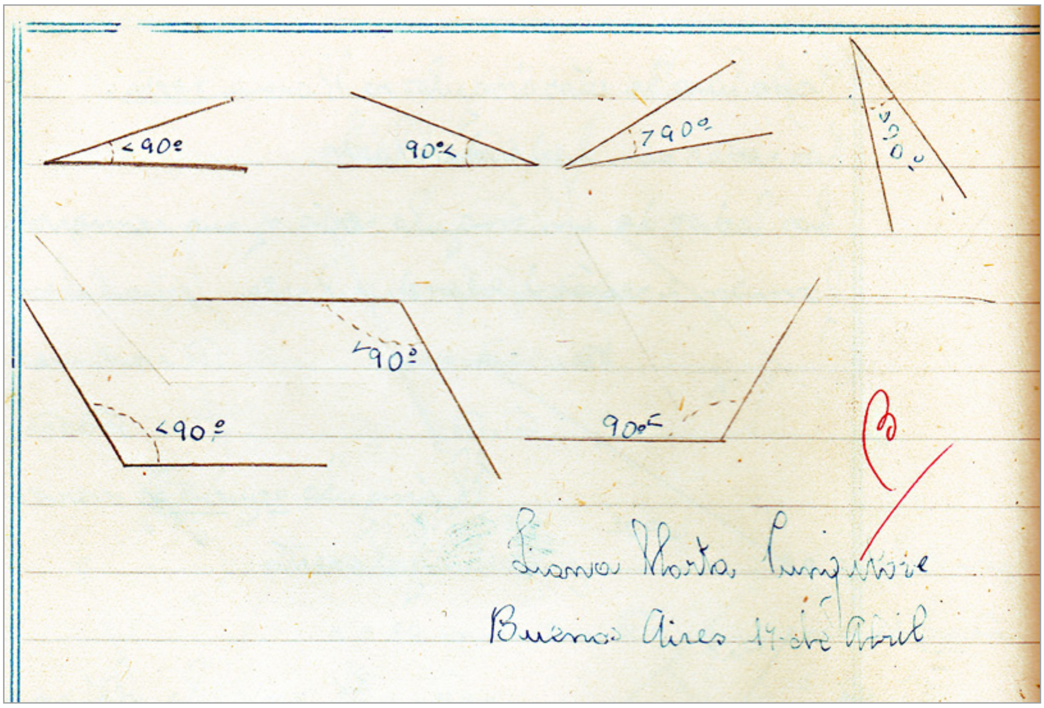
La enseñanza de la medida y los desafíos de la capacitación

Autores: Graciela Chemello, Silvia Chara, Mónica Agrasar y Analía Crippa
Equipo Áreas curriculares del Ministerio de Educación

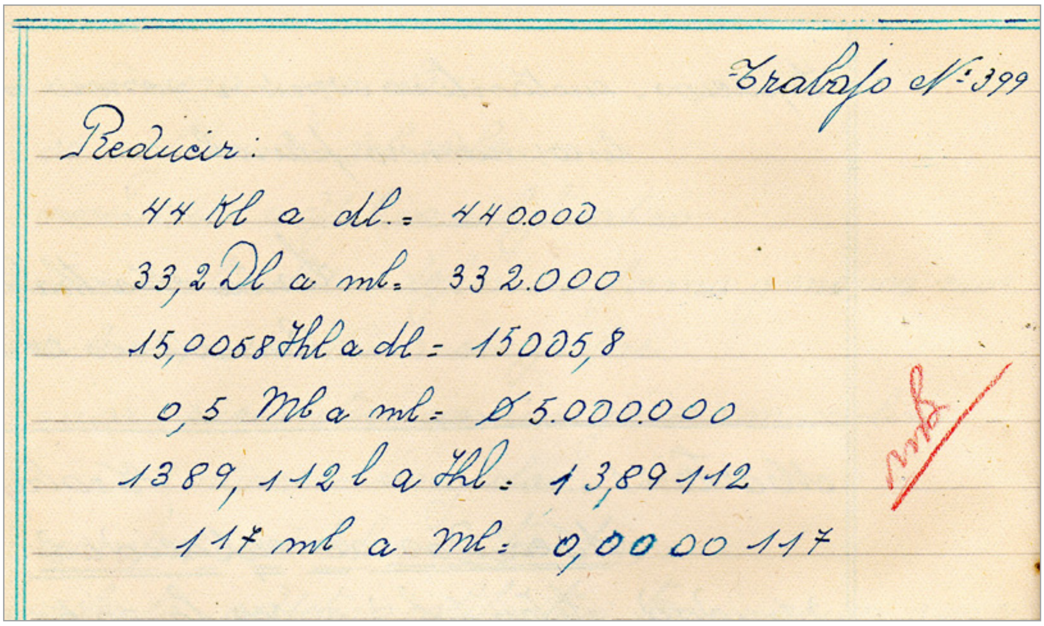
Introducción

En la clase anterior decíamos que la “utilidad práctica” es una razón que muchas veces se esgrime para defender la presencia de un contenido de enseñanza en la escuela. Sin embargo, este argumento no parece consistente con la manera como algunas prácticas docentes –muy instaladas en la primaria– tratan la medida.

Tal como anticipamos en la presentación de este módulo, en esta Clase problematizaremos la enseñanza escolar de la medida –que habitualmente se centra en el cálculo a través de la aplicación de fórmulas y equivalencias–, buscando aportar elementos para entrar en diálogo con dichas prácticas desde la capacitación. Nuestra intención es promover una mejor construcción del sentido de este saber matemático por parte de los niños y niñas.



Ejercicio de medición de ángulos.



Ejercicio de reducción de medidas.

Frente a estas imágenes, nos preguntamos si lo que aprenden los niños en la escuela primaria les es realmente útil para resolver problemas y tomar decisiones fuera de la escuela. Y, en caso de que esto no sea así, si les aporta otro tipo de conocimientos necesarios para resolver otros problemas, para comprender la organización interna de la matemática o sus modos de trabajo.

Revisar estas cuestiones será central en la capacitación, ya que tanto el ritmo que impone la tarea cotidiana en la escuela como la preocupación por los desafíos que supone la enseñanza de otros temas muchas veces hacen que naturalicemos algunas prácticas, sin revisar su sentido en la escuela hoy. Por esta razón es que en esta Clase tomaremos como objeto de análisis algunas propuestas que nos permitan abordar estos interrogantes con los maestros.

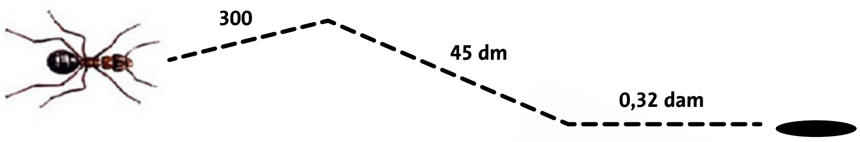
A tal fin, reflexionaremos acerca del significatividad de algunas tareas que se proponen a los alumnos y que parecen “irrenunciables” –o, al menos, se incluyen de manera automática, como “pasar de km a cm”–. Además, intentaremos identificar algunos obstáculos didácticos relacionados con la enseñanza del perímetro y del área que llevan a construir concepciones erróneas que se mantienen, muchas veces, hasta la edad adulta.

Asimismo, plantearemos algunos criterios en relación con la planificación de secuencias de enseñanza que permitan una mayor construcción de sentido para estos conocimientos.

Sobre los problemas de medida y el análisis de la enseñanza habitual

El eje de contenidos que nos vincula de manera más directa con nuestro entorno cotidiano es el de la medida. Sin embargo, frecuentemente su enseñanza se organiza sobre actividades que solo se realizan en la escuela.

> *¿Cuántos metros recorrió la hormiga para llegar al hormiguero?*



> Medí el ancho y el largo de tu banco usando:

a) un lápiz
b) una goma de borrar

En estos ejemplos, la presencia de "lo real" a través de la imagen resulta forzada y no contribuye a la construcción de sentido. En un caso, solo se trata de expresar una misma cantidad con distintas unidades; en el otro, se intenta llamar la atención sobre la necesidad del uso de unidades convencionales a través de mediciones que, paradójicamente, no tienen sentido.

¿Quién necesita estos resultados? ¿Para qué? ¿Por qué se eligen esas unidades?

Justamente, frente a un problema real de medida, el mismo problema llevará a decidir qué unidades e instrumentos son pertinentes, en función de si se necesita una medida estimada o más o menos precisa, y de las condiciones en las que se realiza la medición.

Cabe destacar que conocer los procesos históricos de construcción de los sistemas de unidades ayuda a comprender el modo como el saber matemático permite mejorar algunos procesos, atendiendo a su eficiencia y comunicabilidad. Sin embargo, esto no deriva en una recomendación didáctica que fuerce el pasaje desde el uso de unidades no convencionales hasta el uso de las convencionales.

Un grupo de niños de cuarto grado no dudaría en recurrir al uso de la regla –o de una cinta métrica, si estuviera disponible– para determinar el ancho de su mesa de trabajo y registrar el dato en metros y centímetros, en caso de que tuvieran que informar las medidas a la cooperadora para reemplazar la cubierta. Los mismos niños resolverían fácilmente los límites de una cancha de fútbol improvisada en un terreno usando pasos como unidad. Como dijimos antes, es el problema y sus condiciones los que orientan el uso de una u otra unidad de medida.

También es importante tener en cuenta que la creación del sistema decimal de unidades –en particular, el surgimiento del metro– no respondió a la necesidad "ingenua" de comunicarnos sin obstáculos, como se insinúa en muchas textos, sino a profundos procesos de cambio social enmarcados en la búsqueda de igualdad de derechos para todos los ciudadanos.

Recomendación de lectura

Antes de la Revolución Francesa (que se desarrolló entre 1789 y 1799), no existía una unidad de medida unificada. Esto provocaba abusos por parte de los dueños de las tierras, porque los campesinos debían pagar impuestos entregando parte de sus cosechas, que era medida con las unidades elegidas por sus señores según su propia conveniencia. Con la Revolución Francesa, se dictó la *Declaración de los Derechos del Hombre y del Ciudadano* y las personas, por primera vez en la historia de la humanidad, tuvieron la posibilidad de ser iguales ante la ley. Esto llevó a unificar también los sistemas de medida. Una de las primeras unidades elegidas fue el metro, que se definió en ese momento como la diezmillonésima parte de un cuarto de meridiano terrestre.

María del Carmen Chamorro señala que en los manuales escolares muchas veces se observa un deslizamiento desde el tema principal declarado, "la medida", hacia un objeto escondido, la aritmética:

> "Estos ejercicios difícilmente se corresponden con alguno de los planos de la medida o usos prácticos de la misma, careciendo incluso de referencias culturales. Su finalidad es hacer funcionar, según los casos, el conteo y la división, en lugar de la medida con una unidad, la numeración decimal en sustitución de los cambios de unidades.
>
> En la escuela, el aspecto relativo al cálculo se desarrolla de forma privilegiada, muy en detrimento de la resolución efectiva de los problemas de medida. El fenómeno que hemos venido denominando aritmetización de la medida ha invadido todos los aspectos de esta, tanto en la institución como en la vida real. El uso de aparatos cada vez más sofisticados, en los que el individuo solo necesita leer un número en un visor, está a la orden del día y ello priva a los alumnos de las experiencias, en este ámbito, de las que antes disponían. El resultado es un conocimiento teórico de la medida, en el que es indiferente sumar voltios o longitudes, ya que no se requiere tener conocimientos sobre magnitudes, basta con controlar el algoritmo de adición".
>
> Chamorro, 2001: 106.

Puede ser interesante en los espacios de capacitación analizar los libros de texto en uso y discutir acerca de la verosimilitud de las situaciones de medición y de cálculo de las medidas planteadas. También resulta oportuno preguntarse cuáles son las situaciones efectivas de medición a las que nos enfrentamos los adultos y cómo las solucionamos.

La "aritmetización" de la medida se fortalece con la insistencia sobre el tratamiento de las equivalencias en el sistema métrico. Los alumnos lo vinculan rápidamente con la regla práctica de "correr la coma", sin controlar las relaciones entre unidades y cantidades, ni la razonabilidad del resultado obtenido. Al referirse a los errores que los alumnos cometen en las "reducciones", Bressan y Yaksich (2001: 19) afirman que "[...] muchos provienen de la falta de representaciones mentales de las unidades más comunes como referentes, lo cual les permitiría juzgar criteriosamente los resultados que logran mecánicamente".

En este caso, dichos errores derivan de los obstáculos didácticos más que de otras causas, ya que son consecuencia lógica de las prácticas de enseñanza. Las autoras también coinciden con Chamorro (2001) en que los problemas de reducciones, de operaciones con cantidades y de reemplazo de valores en fórmulas son problemas de aritmética a través de los cuales se ejercitan operaciones con números decimales, pero que no profundizan el sentido de la medición.

Claramente este sentido no puede construirse si, al proponerse actividades que involucran el cálculo de medidas, se incluye de manera sistemática la consigna de expresar la respuesta en una unidad distinta de la que resulta pertinente para la resolución del problema.

a. De una pieza de género se vendieron primero 0,38 hm, luego 4200 cm y por último 1 dam. Si todavía queda 1 m, ¿cuántos cm tenía la pieza de género?

b. Expresar en dm2 la superficie de un campo rectangular de 400 hm de largo por 500 dam de ancho que debe ser arado.

Solo en el caso de tener que multiplicar una cantidad pequeña –por ejemplo, si se debe calcular el material necesario para fabricar un gran número de arandelas de aluminio–, resulta natural un cambio de unidades para expresar el resultado.

No estamos afirmando aquí que no es necesario proponer actividades en las que se requiera expresar cantidades usando distintas unidades y analizar las relaciones entre medidas y unidades. Es más: esto se explicita claramente en los saberes propuestos en los NAP. Sí señalamos que el trabajo en el Segundo Ciclo no debe priorizar las equivalencias, puesto que hacerlo genera en los alumnos concepciones erróneas o muy limitadas acerca de la medida.

Por otro lado, las actividades que involucran mediciones efectivas pueden resultar más complejas de gestionar en la clase que una situación presentada en una fotocopia o en un libro a través de una ilustración.

Estas presentaciones "ostensivas" del saber se basan en el supuesto de que los alumnos pueden apropiarse de una noción a través de la observación de una representación, que supuestamente evoca una situación real, sin haber tenido la oportunidad de realizar efectivamente comparaciones o mediciones de cantidades de diferentes magnitudes. De este modo, los alumnos no pueden poner a prueba sus ideas –por ejemplo, acerca de la capacidad de recipientes de distinta forma o de la equivalencia de de dos superficies– ni modificarlas a partir de interacciones con el medio.

Al analizar este tipo de situaciones en la capacitación, podremos identificar lo que Berthelot y Salim (1994) denominan "ostensión disfrazada": "[...] en lugar de mostrar al alumno lo que hay que ver, el maestro lo disimula detrás de una ficción: la de que es el alumno mismo quien la descubre en los objetos espaciales sometidos a su observación o a su acción".

Otro aspecto que se debe tener en cuenta al analizar actividades escolares es la presencia, o no, de la diferenciación entre medida exacta y aproximada, y de la explicitación del margen de error de una medición o de un cálculo derivado de una medición.

Generalmente, esta cuestión se elude, lo que da lugar a una concepción errónea: es posible obtener una medida "exacta" expresada a través de "un" número si la medición se realiza con suficiente cuidado y con un instrumento adecuado. Esta idea se refuerza al utilizar expresiones con una cifra decimal para expresar resultados de longitudes y operar con ellos cuando, por ejemplo, se trabaja con segmentos.

Muchas veces, se pide "naturalmente" a los alumnos que dibujen usando una regla escolar un rectángulo de 12 cm de perímetro o que construyan un ángulo de 120° con transportador, y luego se trabaja con esos dibujos asumiendo que efectivamente "tienen" esas medidas. En realidad, la acción de medir es una tarea concreta realizada con instrumentos sobre objetos materiales, cuyo resultado es necesariamente un intervalo. Por ejemplo, en el caso del rectángulo, tendríamos que considerar la medida en centímetros en el intervalo 11,9-12,1. En el aula, asumimos que es suficiente una precisión de más o menos un milímetro si se usa la regla –y de un grado cuando se usa el transportador–, pero no siempre se explicita esta decisión a los alumnos, que depende de la graduación de los instrumentos que se usan.

En Matemática, podemos concebir una medida exacta expresada por un único número y no por un encuadramiento en un intervalo. Por ejemplo, la longitud de una circunferencia cuando se toma como unidad de medida su diámetro es π.

Aunque pueda parecernos que esta diferenciación no es significativa en la escuela primaria, la ausencia de su tratamiento en el nivel inicial genera obstáculos importantes en el nivel siguiente y dificulta una construcción ajustada de la noción de medida.

Como ya hemos planteado, las concepciones de los alumnos se ven seriamente afectadas por prácticas de enseñanza como las que describimos, muy instaladas por la tradición. Por esta razón, es necesario que en la capacitación propongamos alguna situación que lleve a problematizar estas prácticas. Habitualmente no se cuestionan, porque los maestros no consideran que generen demasiados "problemas de aprendizaje". Tengamos en cuenta que los tiempos de la escuela y la necesidad de acreditar a los alumnos también contribuyen a la persistencia de este tipo de actividades, ya que cuanto más algorítmica es una tarea, más fácil y rápido resulta explicarla, ejercitarla y evaluar su apropiación.

Asimismo, también debemos considerar que, como afirma Bednarz (1997), la evolución del "saber enseñar" del docente deriva de la comprensión que este tiene de su acción. Tal evolución puede ser transformada a partir de esa comprensión y no del señalamiento de un supuesto experto, que aporta soluciones para problemas que no ha detectado.

Entre las dificultades que sí son detectadas por los docentes y que son motivo de consultas frecuentes en la capacitación, se encuentra la "confusión" entre perímetro y área, cuestión que abordaremos en el próximo apartado.

Sobre el perímetro y el área, su enseñanza y su tratamiento en la capacitación

Las dificultades detectadas en el aprendizaje del perímetro y del área de las figuras –y, posteriormente, del volumen de los cuerpos– frecuentemente llevan a identificar un nudo problemático. Así lo expresan algunos maestros: "Los alumnos aplican bien las fórmulas, pero no ponen unidades en la respuesta", "Les da lo mismo metro que metro cuadrado", "Siempre preguntan si el área del cuadrado es lado por 4 o lado al cuadrado".

En principio, cabe destacar que el tratamiento "aritmetizado" de las magnitudes hace que resulte difícil para el alumno diferenciarlas, ya que, en definitiva, pareciera que solo se trata de "correr la coma", aplicar fórmulas y operar con decimales. Y este trabajo es común para todas las magnitudes. Más aún, frente a una presentación ostensiva y prematura de las fórmulas, los alumnos pueden "aplicarlas" cuando se incluyen los datos en el enunciado de un problema, pero tienen dificultades para explicitar a qué se denomina "altura" en un triángulo o confunden la altura de un paralelogramo con un lado si tienen que tomar las medidas de un dibujo.

Otro factor que influye en la dificultad para diferenciar estas magnitudes es el tratamiento "aislado", derivado de la distribución de los contenidos que suele hacerse en el segundo ciclo. Habitualmente, se inicia el tratamiento de la noción de perímetro en cuarto grado. En quinto, se dedica un tiempo a su profundización y luego se inicia el trabajo sobre superficie. En sexto grado, el trabajo se focaliza en los cálculos de superficies. En séptimo, eventualmente, se aborda el volumen. El tratamiento de estas magnitudes no siempre incluye su puesta en relación, cuestión que sí se presenta como necesaria en los NAP:

> **EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA Y LA MEDIDA**
>
> **El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas en situaciones problemáticas que requieran:**
>
> QUINTO AÑO:
>
> - comparar figuras analizando cómo varían sus formas, perímetros y áreas cuando se mantiene alguna o algunas de estas características y se modifica/n otra/s.
>
> SEXTO AÑO:
>
> - Analizar la variación del perímetro y el área de una figura cuando varía la longitud de sus lados.

Por otra parte, nuestra experiencia sensible muchas veces nos lleva a suponer que longitud, superficie y volumen siempre crecen o decrecen conjuntamente. Por ejemplo, para reformar una habitación más grande que otra, anticipamos que usaremos más alfombra, más zócalos, más pintura. Intuitivamente tendemos a pensar que esto siempre es así.

¿Cómo abordar estos aspectos en la capacitación? ¿Cómo generar instancias que nos lleven a revisar lo que se hace en las aulas sin que el análisis derive en tal desestabilización de las prácticas, que paralice la acción? ¿Cómo intervenir cuando se ponen en evidencia concepciones “erróneas” de los propios adultos?

Como ya hemos señalado, cuando se piensa el aprendizaje en términos de concepciones que se van construyendo, ampliando, revisando, aquello que solemos interpretar como “error” se resignifica en términos de conocimiento provisorio, derivado de las experiencias en las que el sujeto ha tenido oportunidad de participar. Esto –que vale tanto para niños como para adultos, no sólo en lo que respecta al conocimiento matemático, sino también al didáctico– nos lleva a pensar de manera más dinámica en saberes que se transforman antes que en conocimientos que se tienen, o no se tienen, de manera acabada. Esta cuestión impregna todas nuestras intervenciones. De ese modo, será clave la construcción progresiva en la capacitación de un espacio de confianza donde cada participante, incluido el capacitador, sienta que afortunadamente tiene algo más que aprender.

Mientras este espacio preservado se construye, resulta prudente –sobre todo en los primeros encuentros de capacitación– proponer el análisis de casos donde los docentes aludidos no sean los mismos participantes.

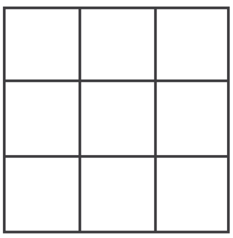
A continuación, presentamos tres casos, seguidos de algunas reflexiones, cuyo uso consideramos pertinente en la capacitación. Señalaremos primero algunas cuestiones relativas a la explicitación de las relaciones área-perímetro y luego otras, referidas a la planificación de secuencias de actividades.

A. El caso del alumno “inventor”

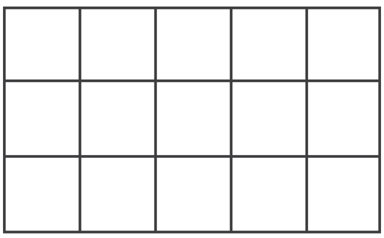
Una maestra de quinto grado está trabajando con sus alumnos. La clase ha avanzado, según lo planificado, a partir de la resolución de problemas que consistían en averiguar el área de distintos patios usando las baldosas como unidad de medida. En la clase anterior, habían resuelto problemas calculando el perímetro de distintos rectángulos.

Un alumno se acerca y le dice a la maestra: “¡Descubrí algo! Cuando el patio se agranda aumenta la cantidad de baldosas y si calculamos el perímetro también aumenta”.

El alumno muestra un dibujo donde se ve:



9 baldosas
12 de perímetro



15 baldosas
16 de perímetro

Ante esta situación, pregunten a los docentes cuál piensan que tendría que ser la intervención de la maestra.

B. El caso del practicante

Un maestro de quinto grado se reúne con un estudiante del instituto de formación docente cercano a su escuela que está en su primera etapa de formación. Tiene que preparar dos clases y el maestro le había sugerido que comenzara a trabajar con la comparación de perímetros y áreas para figuras de distinta forma. El practicante le propone al maestro presentar el siguiente problema:

"En una escuela se decide hacer un proyecto de huerta orgánica con los alumnos de sexto y séptimo grado. Cada grupo va a diseñar y trabajar sobre su propia huerta. El director tiene un rollo de 60 m de alambre y le entrega la mitad a cada grupo para que marquen el terreno que van a usar con unas estacas de madera, que también les entrega. ¿Piensan que las huertas de los dos grupos quedaron iguales?"

Además le dice que va a llevar un ovillo de hilo para darle unos 4 metros a cada grupo de alumnos y proponerles que vayan al patio para probar cómo podrían quedar las huertas.

Ante esta situación, pregunten a los docentes cuál piensan que tendría que ser la intervención del maestro.

C. El caso del colega nuevo en la escuela

Un nuevo maestro toma una suplencia de dos meses en un sexto grado. Los alumnos han estado trabajando la semana anterior calculando perímetros de distintas figuras y expresando cantidades con diferentes unidades de longitud. Como no está muy seguro, no conoce la institución y solo estuvo dos días con los chicos, le pide consejo a la maestra del grado paralelo y le comenta que piensa trabajar con la secuencia siguiente tomada de *Matemática 5* de la serie Cuadernos para el aula (pp. 168-173).

Secuencia para relacionar perímetro y área: "Armando figuras".

Actividad 1

A continuación, presentamos un juego[25] que apunta, como primer objetivo, a poner en evidencia para los alumnos que hay diferentes figuras que tienen la misma área, del mismo modo que hay diferentes figuras que tienen el mismo perímetro.

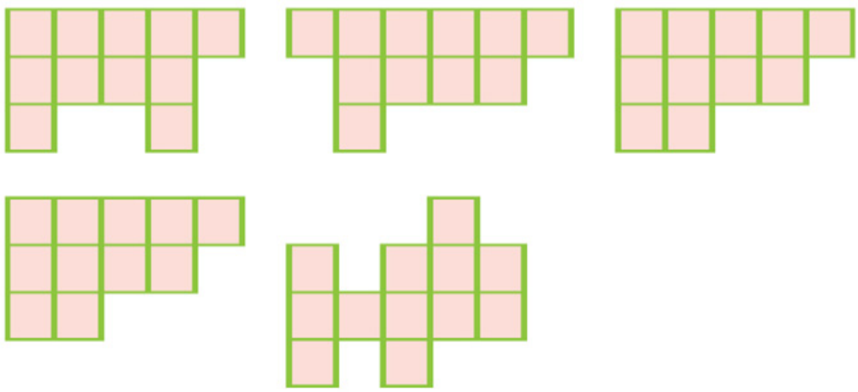
"Figuras y condiciones": figuras con perímetros y áreas dados.
Materiales: 60 cuadraditos de igual tamaño en cartulina o plástico.
10 tarjetas que digan área, con los siguientes números: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y otras 10 tarjetas que digan perímetro, con los siguientes números: 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.
Organización de la clase: se juega entre tres o cuatro grupos formados por dos personas cada uno.
Desarrollo: el juego consiste en formar, con los cuadraditos, configuraciones en las que estos se encuentren unidos por un lado completo, y que tengan áreas o perímetros que se estipulen desde las tarjetas. La unidad de medida para el perímetro es el lado de los cuadraditos y la unidad de medida para la superficie son cada uno de los cuadraditos.
Se colocan los cuadraditos en el centro de la mesa. Se mezclan las tarjetas numeradas y se colocan boca abajo sobre la mesa. Por turno, uno de los jugadores levanta una tarjeta y la lee en voz alta.
Durante un tiempo estipulado previamente, se trata de armar la mayor cantidad de configuraciones que respeten la condición dada por la tarjeta, utilizando los cuadraditos que están en el centro de la mesa.
Pasado el tiempo, se ponen en común las configuraciones y se adjudica 1 punto a cada configuración correcta y 0 puntaje a las incorrectas.
Se vuelven a colocar los cuadraditos en el centro para la próxima jugada.
El juego termina cuando la suma de puntos acumulados por alguno de los grupos alcance 15 puntos.

Actividad 2

A continuación, se ofrecen algunas partidas simuladas que se pueden presentar como problemas.

- Marisa dijo que cuando a su grupo le tocó la tarjeta área: 10, armaron 6 figuras; ¿cuáles pudieron haber sido esas figuras?

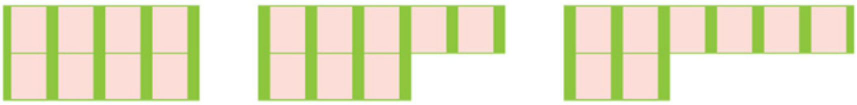
- El grupo de Hernán armó las siguientes figuras a partir de la tarjeta perímetro: 18. ¿Cuáles van a obtener puntaje?



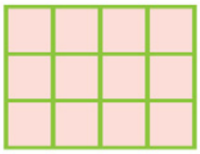
Actividad 3

Los problemas que siguen plantean cuestiones y dificultades que no aparecen necesariamente en el juego y que significan una profundización en la reflexión acerca de la constancia y variación del perímetro y el área.

• Martín dijo que cuando les salió la tarjeta área: 8 el grupo de Rocío había armado las figuras de abajo y él armó otras 2 figuras, también de área: 8 pero de mayor perímetro. ¿Cuáles pueden ser esas figuras?



• Josefina dijo que en la jugada en la que Máximo armó la figura de abajo, ella había armado otras 2 de igual perímetro y área. ¿Qué figuras pudo haber armado?



Actividad 4

Otra actividad que podemos realizar con el mismo material, y apuntando al mismo objetivo, es disponer una configuración con los cuadritos y solicitarles a los chicos que armen otras, que cumplan a la vez dos condiciones en relación con la dada. Por ejemplo, que tengan mayor área y menor perímetro o menor perímetro e igual área.

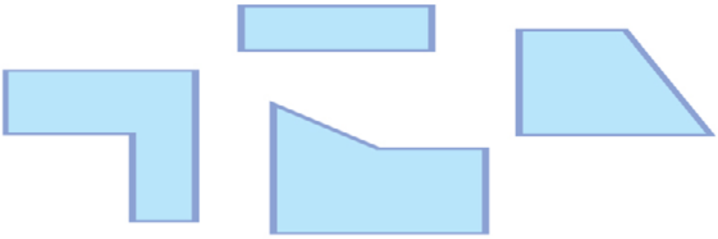
Actividad 5

Esta actividad tiene como propósito que los chicos discutan sobre la validez de proposiciones generales acerca de conservación del área y el perímetro. Para esto, tienen la posibilidad de partir del conocimiento de casos particulares que les proporcionó el problema, y de la resolución y el debate de las partidas simuladas.

• Luego de haber participado del juego anterior, algunos alumnos sacaron las siguientes conclusiones. Indicá si estás de acuerdo o en desacuerdo con las mismas y fundamentá tu respuesta.
- Todos los polígonos de igual área tienen el mismo perímetro.
- Algunos polígonos del mismo perímetro y la misma área tienen diferente forma.
- Todos los polígonos del mismo perímetro tienen igual área.

A continuación, proponemos otra actividad orientada en el mismo sentido que la secuencia anterior, y que puede contribuir a la profundización de las reflexiones iniciadas, puesto que aparecen algunas formas que no son posibles de construir a partir de los materiales del juego.

• Cuando sea posible, transformá[26] (agregándoles o sacándoles algo) las siguientes figuras, para obtener otras que tengan:
a) un área mayor, conservando el mismo perímetro;
b) un área menor y un perímetro mayor.



Ante esta situación, pregunten a los docentes qué consultas y sugerencias le harían.

Antes de continuar

Elija alguno de los casos para presentar en una situación de capacitación, anticipe y registre cuáles serían sus intervenciones y qué preguntas agregaría para orientar su análisis.

En los tres casos, de diferente manera, se ponen en juego la consideración simultánea de área y perímetro de distintas figuras, buscando problematizar la convicción de muchos niños y adultos que piensan que "si el perímetro/área de una figura es mayor/menor que el perímetro/área de otra, entonces sus áreas/perímetros guardan la misma relación".

Al tomar cualquiera de estos casos en la capacitación, a la vez que se abre la discusión acerca del problema de la enseñanza, el mismo análisis de las actividades lleva a cuestionar las propias ideas que se tienen sobre esta relación. Este hecho no es para nada trivial, en especial si no se ha explorado antes.

Entre muchas investigaciones que abordan este tema, Bruno D´Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla (2007) proponen a un grupo de maestros (profesores de escuela secundaria, profesores universitarios y estudiantes de formación docente) la siguiente situación:

¿Es posible encontrar pares de figuras A y B que permitan ejemplificar los nueve casos siguientes?

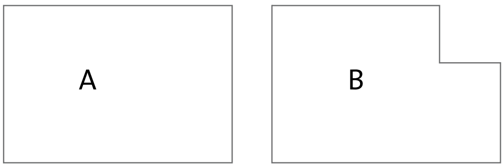
p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

En la primera casilla, > > significa que pasando de la primera figura (A) a la segunda (B), el perímetro aumenta y el área aumenta. En = >, el perímetro se mantiene igual y el área aumenta. En < >, el perímetro disminuye y el área aumenta, y así sucesivamente.

Otra de las preguntas de la investigación es la siguiente:

¿La superficie de A es menor, igual o mayor que la superficie de B?

¿Y el perímetro de A es menor, igual o mayor que el perímetro de B?



Recomendación de lectura

Si está interesado en profundizar el contenido de dicha investigación, puede leer el artículo completo de D'Amore y Fandiño Pinilla, "Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes", disponible en http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33500103.pdf.

En las conclusiones de esta investigación, los autores señalan que el obstáculo para la construcción satisfactoria de las relaciones entre perímetro y área es básicamente de naturaleza didáctica y deriva de las siguientes elecciones:

> "Se usan siempre y solo figuras convexas, lo que provoca la idea errónea de que las figuras cóncavas no pueden ser usadas o no son convenientes.
>
> Se usan siempre figuras estándar provocando la misconcepción[1] que viene enunciada generalmente con la frase: 'Pero esta no es figura geométrica'.

[1] Idea errónea, incompleta y válida solo para casos particulares, asociada a estereotipos o a un significado cotidiano o coloquial.

Casi nunca se ponen explícitamente en relación área y perímetro de la misma figura geométrica; por el contrario, a veces se insiste en que el perímetro se mide en metros (m), mientras que el área en metros cuadrados (m^2), y se insiste en las diferencias y no en las relaciones recíprocas.

Casi nunca se hacen transformaciones sobre las figuras de forma que se conserven o se modifiquen área o perímetro, lo que crea una misconcepción en cuanto al significado que tiene el término 'transformación'; de hecho, muchos estudiantes entienden espontáneamente por 'transformación' un cambio que solo implica una reducción o una ampliación de la figura (una homotecia o una similitud); en el caso (p=, S=), como consecuencia, muchos estudiantes rechazaron la identidad o una isometría como una 'transformación'".

D´Amore y Pinilla, 2007: 61.

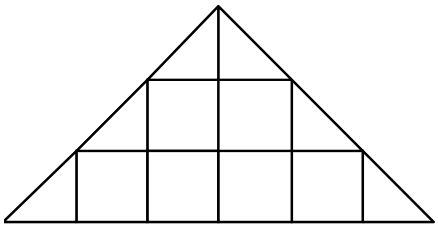
Por consiguiente, el primer paso para transformar la enseñanza es aclarar las propias ideas, teniendo en cuenta que las "ideas" –acerca de este y otros temas– siempre están sujetas a eventuales modificaciones en función de los problemas que tenemos que resolver y que nos permiten conocer nuevos aspectos de lo ya conocido. En este caso, el problema es la enseñanza y, de no ser por este desafío, muchos adultos podrían mantener sus concepciones acerca de las relaciones área-perímetro sin que esto afectara sus tareas cotidianas. Como señala Ball (2000), hay una gran diferencia entre saber cómo resolver ejercicios matemáticos y saber matemática para enseñarla.

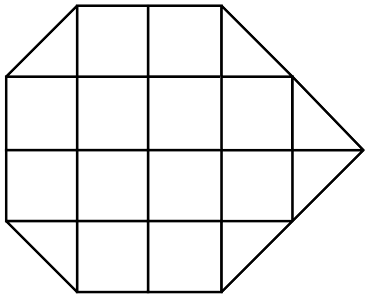
Para cualquiera de los casos presentados –y en particular para el A) y el B), dado que solo plantean una situación–, sería necesario anticipar algunas intervenciones que llevaran a profundizar el análisis del conocimiento matemático involucrado, tal como planteamos en la Clase 6.

Por ejemplo:

CASO A): ¿De qué otra forma es posible organizar los 9 cuadrados iniciales? Cambiar la forma, ¿modificará el perímetro? ¿Y para el caso de los 15 cuadrados? Si el alumno no hubiera comenzado con un cuadrado, ¿creen que hubiera llegado a las mismas conclusiones? ¿Sería posible construir una figura de 15 cuadrados de área y perímetro mayor que 16?[2] ¿Y menor? ¿Qué podríamos decir del área y el perímetro de estas figuras?

[2] En todos los casos se deberá prestar particular atención al hecho de que las unidades de área son los cuadrados y las de longitud, los lados de esos cuadrados. Asimismo, habrá que aclarar que 15 cuadrados de área significa que esta medirá 15 unidades, sin que esto "obligue" a que la figura se arme con cuadrados.





Esta última pregunta también lleva a revisar la concepción –errónea– de que la longitud del lado del cuadrado y la de su diagonal son iguales, cuestión que se resuelve fácilmente aplicando la propiedad de Pitágoras.

CASO B): ¿Necesariamente las huertas deben ser rectangulares? Si son rectangulares, ¿hay algún rectángulo particular que permita aprovechar mejor el terreno abarcando mayor área? ¿Y si pudieran hacerse de cualquier forma?

En este caso, se puede precisar la inclusión del cuadrado como un rectángulo particular y avanzar en el cálculo y la comparación del área para figuras de distinta forma, incluyendo el círculo. Esto, a su vez, llevará a revisar la relación entre la longitud de la circunferencia y π para obtener el radio.

CASO C): Podrían plantearse preguntas similares a las mencionadas para A), adaptándolas a las figuras que se incluyen en la secuencia.

Además de las reflexiones, las relaciones con otros contenidos y las preguntas vinculadas a los conocimientos matemáticos que surjan, también interesa precisar qué aspectos didácticos debemos considerar al hacer el análisis. En particular, nos detendremos ahora en la cuestión de los diferentes aspectos a tener en cuenta en el diseño y análisis de secuencias de actividades.

Cabe señalar aquí que, si bien en esta Clase hemos tomado una secuencia de actividades para relacionar las nociones de perímetro y área, las dimensiones de análisis que presentamos a continuación son de carácter general.

En principio, en relación con la planificación de la enseñanza, es necesario tener en cuenta diversos niveles (proyecto institucional; planificación anual, de unidad didáctica, de una clase; etc.) y cuestiones, entre las que ocupa un lugar particular la organización de secuencias de actividades de enseñanza.

Cuando se opta, por ejemplo, por planificar por "tema" sin prestar atención a una caracterización didáctica del contenido –en términos de sus contextos de uso y sus significados, representaciones y propiedades, y de las diferentes tareas que los alumnos pueden realizar–, resulta difícil detectar las causas a las que se pueden atribuir las dificultades en el aprendizaje de los alumnos y tomar decisiones para reorientar la enseñanza. Ahora bien, esta diversidad no puede abordarse simultáneamente y por esta razón se organizan secuencias de actividades con propósitos definidos.

Cada actividad de una secuencia se apoya en algún saber elaborado en la actividad anterior y, a la vez, plantea alguna diferencia. Se sostiene así un trabajo articulado en clases sucesivas sobre un mismo contenido. Volver sobre una tarea que se hizo el día anterior para revisarla o sobre una noción abordada para usarla en un nuevo problema, manteniendo el foco de trabajo, permite que los alumnos encuentren sucesivas y variadas oportunidad de acercarse a la noción en estudio. A la vez, posibilita que los alumnos afiancen lo aprendido o descubran nuevas relaciones. Este trabajo por aproximaciones sucesivas da lugar a que más alumnos avancen en el logro del propósito al que se apunta.

Si bien es posible organizar secuencias de actividades de formas muy distintas de acuerdo con diferentes propósitos, es importante que al hacerlo tengamos en cuenta las características del tipo de trabajo matemático que estamos interesados en promover, según analizamos en la Clase 9.

En cuanto a las formas de interacción del alumno con el problema, por un lado, y con sus compañeros y el maestro, por el otro, toda secuencia tendría que incluir situaciones de acción sobre un medio (material o simbólico), situaciones de interacción con conocimientos que se han comunicado y que han sido formulados por otros, y situaciones de producción y discusión de argumentos que sostengan las afirmaciones realizadas.

Con respecto a los contextos, aunque puede plantearse una secuencia particular que presente todas sus actividades en contexto extra-matemático, ese tipo de trabajo debe complementarse necesariamente con una análisis "intra", y viceversa. En la Clase 5 planteamos que cuando la enseñanza se centra en la actividad matemática, cada conocimiento ha de pasar de un primer momento en el cual se presenta en clase como herramienta de la actividad matemática, a otro en el que se transforma en objeto de estudio.

En esa Clase señalamos también que Duval plantea que en la enseñanza se suelen presentar diferentes representaciones y el tratamiento de cada una de ellas pero que, frecuentemente, está ausente el trabajo sobre la forma de pasar de un registro a otro, así como el análisis de la conveniencia de utilizar un registro u otro en relación con la situación planteada. En este sentido, podríamos preguntarnos si este trabajo sobre distintos registros está presente en una secuencia dada.

En síntesis, frente a una serie de actividades seleccionadas para enseñar cierto contenido, podríamos considerar las siguientes *dimensiones de análisis* para determinar en qué medida constituyen una secuencia con un propósito didáctico definido:

- Contextos: intra matemáticos y/o extramatemáticos.
- Significados (si es posible diferenciarlos para la noción en estudio).
- Representaciones utilizadas: numéricas, gráficas, con materiales concretos. ¿Hay actividades específicas que requieran de un cambio del registro de representación?

- Tipos de interacción: acción, formulación, validación. Tipos de validación requerida.
- Uso implícito o explícito de la noción.
- Uso como herramienta o como objeto matemático.
- Propiedades de la noción en estudio.

En particular y según la/s noción/es que se abordan en la secuencia, también podría precisarse si en las actividades se sostienen o varían: los tipos de números (naturales o racionales); el rango numérico (por ejemplo, del 100 al 200) o repertorio (por ejemplo, fracciones de denominadores 2, 4 y 8); las clases de figuras (cuadriláteros, triángulos, etc.); los tipos de magnitudes (continuas, discretas, de la misma o distinta naturaleza), etc.

Asimismo, como dijimos en la Clase 9, la elección de la utilización o no de materiales "concretos" como parte del problema da lugar al uso de diferentes conocimientos y consecuencia el desarrollo de diferentes aprendizajes. Por tanto, el lugar que se da al material concreto también podría analizarse. Cabe aclarar que, según se presenten el sentido y la oportunidad de su inclusión, se corre el riesgo de promover una actividad empírica orientada por el docente y no una actividad intelectual realizada por el alumno.

También podría analizarse si se incluyen actividades con un propósito particular relacionado con el proceso de estudio. Por ejemplo, afianzar el uso de algún procedimiento específico; sistematizar propiedades descubiertas y utilizadas en actividades anteriores; identificar los conocimientos "aprendidos" y elaborar una síntesis; registrar los propios avances en el aprendizaje y las nuevas preguntas que interesa investigar, entre otros posibles.

De este modo, al realizar el análisis de una secuencia de actividades a partir de estas dimensiones, si encontráramos que los contextos son distintos, los tipos de representaciones varían o cambia el repertorio numérico –entre otras diferencias posibles–, no podríamos asegurar la consistencia interna de la secuencia en función de algún propósito definido. Si, en cambio, se evidenciaran reiteraciones en varias dimensiones al mismo tiempo (actividades con el mismo contexto, el mismo rango numérico, el mismo tipo de interacción, etc.), estaríamos frente a una propuesta de actividades repetitivas que no enriquecerían el tipo de trabajo propuesto a los alumnos, con el consecuente impacto en sus aprendizajes.

Volviendo a los casos presentados en esta Clase y con vistas a su uso en los ámbitos de capacitación, se podría tomar el del maestro suplente que piensa trabajar con la secuencia extraída del *Cuaderno para el Aula* de quinto grado y analizarla teniendo en cuenta alguna/s de estas dimensiones. Luego, se podría compartir la lectura de las páginas 168 a 173 del *Cuaderno*, donde se explicitan recomendaciones didácticas para desarrollar estas actividades. Otra alternativa basada en este mismo caso sería diseñar una secuencia de actividades, agregando otras antes y/o después de la situación planteada, en función de un propósito acordado con los maestros.

Actividad obligatoria

Considere que tiene que visitar una escuela para llevar adelante un curso de capacitación y realice las siguientes consignas, a partir de lo analizado en esta Clase y de su conocimiento de las prácticas de enseñanza que se desarrollan hoy en las escuelas de su región:

1. Anticipe tres preguntas que podrían hacer los maestros en relación con la enseñanza de la medida.

2. Elija uno de los casos planteados o alguno de los problemas presentados por D´Amore y Pinilla en su investigación, y diseñe una actividad para realizar en dicha capacitación. Explicite los propósitos del encuentro, las consignas de trabajo que propondría y las conclusiones a las que esperaría llegar con los docentes.

Referencias bibliográficas

Ball, D. (2000), "Bridging practices, intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach", *Journal of Teacher Education*, Vol. 5, Nº 3, mayo/junio, pp. 241-247.

Bednarz, N. (1997), "Formation continue des enseignant en mathématiques: une nécessaire prise en compte du contexte", *Collection Astroide*. UQAM. (Traducción de circulación interna).

Bressan, A. y A. Yaksich (coords.) (2001), *La medida: propuestas para repensar su enseñanza en la EGB. Módulo 1*. Serie "Aportes al Proyecto Curricular Institucional" (Obra colectiva de la Red de Escuelas de Campana). IIPE OIE/UNESCO. Disponible en http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/medidamodulo1.pdf.

Chamorro, C. (2001), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones del Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

D'Amore, B. y M. I. Fandiño Pinilla (2007), "Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10, Nº 1, pp. 39-68.

Guirette, R. y G. Zubieta (2010), "Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático", *Educación Matemática*, Vol. 22, Nº 2, agosto, pp. 93-121. Disponible en http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40516666005.