Clase virtual Nº 12

La actividad geométrica en la historia y sus implicaciones en las aulas

Autores: Graciela Chemello, Silvia Chara, Mónica Agrasar y Analía Crippa
Equipo Áreas curriculares del Ministerio de Educación

Presentación Módulo 4

En esta etapa del ciclo, estamos abordando los desafíos que supone el tratamiento en la capacitación de algunos temas centrales para la enseñanza de la Matemática en la escuela primaria. Tomamos casos de capacitación para maestros que están diseñados en base a distintas necesidades y propósitos.

En el Módulo 2, nos preguntamos acerca de los factores que influyen en la modificación de las prácticas de enseñanza relativas a las operaciones con números naturales, para buscar elementos que nos permitieran intervenir frente a la priorización que se da, aún hoy, al uso de algoritmos fijos en muchas escuelas. Nos formulamos los siguientes interrogantes: ¿por qué existe esta resistencia al cambio? ¿Qué factores influyen? ¿Qué tipo de intervenciones en la capacitación podrían generar otro impacto? ¿Qué tipo de profundización sobre los conocimientos matemáticos incluidos en los Documentos Curriculares para la escuela primaria contribuiría a la mejora de las prácticas de enseñanza?

Nuestro caso de estudio (una capacitación para maestros de varias escuelas) nos permitió intercambiar ideas acerca de la relación entre las prácticas docentes y las concepciones y saberes matemáticos de los maestros.

En el Módulo 3 –y sin desatender el trabajo matemático–, nos centramos en el conocimiento didáctico de los maestros y su evolución en el ámbito del trabajo cotidiano en la escuela, con el objetivo de precisar qué lugar debe darse a los aportes de la teoría didáctica en la capacitación. El tema de enseñanza seleccionado (los números racionales, sus usos y propiedades) nos enfrenta a un problema distinto en la capacitación, debido a la complejidad del campo numérico y las rupturas que conlleva su aprendizaje en relación con los conocimientos previos de los niños sobre los números naturales. Asimismo, su enseñanza requiere de una planificación que trasciende en mucho las decisiones personales del maestro en su aula y que involucra la articulación de las propuestas que se hacen en distintos grados. Abordamos esta cuestión al analizar el caso de una capacitación para unos maestros del segundo ciclo que había solicitado el Director de una escuela.

Antes de continuar

El módulo que estamos iniciando es el último del área en este ciclo, por lo que le sugerimos que reflexione sobre el trabajo realizado en los Módulos 2 y 3 y registre sus apreciaciones acerca de las preguntas que nos hicimos al comienzo:

- ¿Qué tipo de profundización sobre los conocimientos matemáticos incluidos en los Documentos Curriculares para la escuela primaria contribuye a la mejora de las prácticas de enseñanza?
- ¿Cómo puede evolucionar el conocimiento didáctico de los maestros en el ámbito del trabajo cotidiano en la escuela?
- ¿Qué tipo de intervenciones y prácticas de desarrollo profesional contribuyen a revisar las prácticas de enseñanza?

En el Módulo 4, abordaremos el caso de la enseñanza de la Geometría –que muchas veces tiene poca presencia en la escuela– y su relación con el tratamiento de la medida.

Analizaremos algunas propuestas que lleven a revisar en la capacitación algunas prácticas habituales, y otras que permitan discutir con los maestros el sentido de incluir actividades a propósito de las propiedades geométricas, que requieran un trabajo sostenido en contexto intramatemático. Esperamos obtener, a partir de este análisis, más elementos para diseñar algunos de los componentes de un proyecto de capacitación para maestros y equipos de conducción, que consista en encuentros presenciales y brinde asistencia en las escuelas.

También nos proponemos revisar algunos criterios que orientan las prácticas de evaluación de la enseñanza, por un lado, y de los aprendizajes de los alumnos, por otro.

Además, y dado que aquí cerramos una etapa de trabajo, veremos qué indicadores nos permitirían evaluar el impacto de nuestras intervenciones como capacitadores en las prácticas de los maestros, y de qué manera podría evaluar el maestro su experiencia en la capacitación.

En la Clase 12 haremos una mirada histórico epistemológica para revisar cómo surgió y cómo se sistematizó el conocimiento geométrico, y mostraremos algunos aspectos propios de este campo de conocimiento que deben tenerse en cuenta al planificar la enseñanza.

En la Clase 13 precisaremos los cambios curriculares que se han dado en la enseñanza, con el objetivo de identificar, por un lado, el origen de algunas prácticas habituales ligadas al estudio de la medida y, por otro, las causas de la escasa presencia que tiene en las aulas el trabajo puramente geométrico sobre las propiedades, las figuras y los cuerpos.

En la Clase 14 problematizaremos la enseñanza de la medida centrada en el cálculo, a través de la aplicación de fórmulas. Desde el espacio de la capacitación, buscaremos aportar elementos que permitan promover una mayor construcción de sentido por parte de los niños.

En la Clase 15 nos centraremos en los aprendizajes geométricos, sus desafíos y sus límites en la escuela primaria. Nos preguntaremos qué tipos de problemas se pueden presentar y con qué propósitos, y qué variables didácticas se pueden considerar para organizar secuencias de actividades.

Luego avanzaremos, en la Clase 16, sobre los desafíos que suponen tanto la evaluación de los aprendizajes de los alumnos, como la de la enseñanza, cuando se asume la perspectiva de trabajo que venimos sosteniendo. También consideraremos algunas alternativas para evaluar el proceso vivido en la capacitación, los avances producidos en los saberes de los distintos participantes y las marcas de este proceso en las prácticas efectivas.

Como producción final para acreditar este Módulo, le solicitaremos –a través de consignas que se presentarán oportunamente– que vuelva sobre los textos producidos en las actividades obligatorias previstas en cada una de las clases y diseñe un encuentro de capacitación cuyo eje sea el análisis de una secuencia de actividades para ser llevada al aula. También le pediremos que anticipe algunas intervenciones para trabajar con los maestros al visitar la escuela mientras se lleva adelante la implementación de esa secuencia.

Introducción a la Clase 12

Dado que estamos pensando la enseñanza de la Matemática –y la posibilidad de su aprendizaje– en un marco donde se juegan tanto la concepción sobre la actividad matemática misma, como el proyecto social en el que se inscribe su práctica escolar, cabe preguntarnos cuál es el lugar particular que asume la enseñanza de la geometría en la escuela primaria hoy.

Ya en 1994, en un texto que tuvo gran circulación en nuestro país en el marco del Programa de Transformación de la Formación Docente[1], René Berthelot y Marie-Hélene Salin planteaban que no está muy clara la distinción entre los conocimientos que el niño necesita para controlar sus relaciones habituales con el espacio y los conocimientos geométricos propiamente dichos, y que su enseñanza en la escuela primaria es objeto de numerosas preguntas por parte de los docentes: "¿Cuáles son sus objetivos? ¿En qué contribuyen las actividades geométricas –como lo dicen las instrucciones– a 'la construcción del espacio en el niño'? ¿Qué conocimientos es importante hacer aprender? ¿Son necesarias las definiciones? ¿Cuáles? ¿Están vinculadas las diferentes nociones? ¿Hay una progresión que deba respetarse? ¿Cuáles son las expectativas de los docentes de escuela secundaria y cuáles son las necesidades reales de sus alumnos?"

Hoy esas preguntas continúan abiertas para muchos docentes. Cuando consideramos las prácticas de enseñanza habituales en la escuela primaria al trabajar con contenidos de aritmética, encontramos que la presencia de contextos vinculados a la vida cotidiana resulta un apoyo importante a la hora de invitar a los alumnos a resolver problemas o a evaluar la razonabilidad de algunos resultados. Si analizamos el trabajo sobre el eje geométrico, hallamos que esta misma tendencia se ha reflejado –y muchas veces se refleja– en la priorización de actividades que remiten al cálculo de medidas, y que hay una escasa presencia del trabajo sobre figuras geométricas. Sin embargo, avanzar en la construcción de sentido de los conocimientos matemáticos supone, necesariamente, abordar problemas en contextos internos a la matemática y establecer la validez de afirmaciones de orden cada vez más general. Al mismo tiempo, la escuela no siempre brinda herramientas para enfrentar problemas como la ubicación en un plano o la utilización óptima de un cierto espacio o recorrido, que son corrientes en la vida social de las personas.

¿A qué podríamos atribuir esta situación? ¿Qué sentido podría tener para los alumnos abordar el análisis de las propiedades de las figuras geométricas?

En esta Clase haremos una mirada histórico epistemológica para revisar cómo surgió y cómo se sistematizó el conocimiento geométrico, y mostraremos algunos aspectos propios de este campo de conocimiento que deben tenerse en cuenta al planificar la enseñanza.

[1] Este programa fue implementado entre 1994 y 1997 por el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, en el contexto de la transferencia de los servicios educativos de nivel superior a la jurisdicción provincial.

Notas histórico epistemológicas

Al iniciar el análisis de una nueva problemática de capacitación –sobre la enseñanza de la geometría en la escuela primaria–, nos ocuparemos de volver a pensar en su enseñanza en la escuela primaria y de fundamentar las decisiones didácticas que sostenemos, tal como hemos hecho para las dos problemáticas anteriores. Para ello, nos ocuparemos, primero, de aclarar qué entendemos por Geometría en el nivel primario.

Antes de continuar

Anote lo que usted piensa sobre esta enseñanza hoy.

¿Cómo progresó la construcción del conocimiento geométrico?

En sus orígenes, la Geometría se fue constituyendo, en parte, como modelización del espacio físico. “Diríamos hoy que la Geometría ha partido del mundo sensible para constituir un mundo geométrico, aquel de los puntos, las rectas, los círculos, las esferas, las curvas, las superficies y los volúmenes.” (Chevallard, 1991)

La geometría, como toda teoría matemática, permite tratar problemas prácticos planteados en el mundo sensible, pero se nutre también de problemas planteados en su seno. Desde sus inicios –ligados, fundamentalmente, a la necesidad de medir el área de superficies–, el desarrollo de la Geometría la ha llevado a ser una parte de la matemática. En 1872, Courant (2006: 200) se propuso definirla como un grupo de transformaciones que operan sobre un espacio; este punto de vista permite diferenciar conceptualmente distintas geometrías, tales como la euclidiana, la analítica, la descriptiva, las no euclidianas, la proyectiva, la fractal y la topológica.

Indagaremos aquí en textos de Historia de la Matemática. Nos focalizaremos en el desarrollo de algunos de los primeros conocimientos geométricos producidos por los egipcios, los babilonios y los griegos, hasta la creación de la geometría analítica, dado que ellos constituyen la referencia disciplinar de los objetos de enseñanza indicados para la escuela primaria y los primeros años de la escuela secundaria. En particular, consideraremos ese desarrollo en relación con los tipos de problemas que les dieron origen y los resultados que se obtenían.

Desde los inicios hasta Euclides

Los primeros conocimientos geométricos que surgieron en **Egipto**, según aparece en los papiros, estaban vinculados con fórmulas de medición para evaluar el área de figuras planas y de volúmenes de prismas y cilindros. Sin duda, la necesidad de repartir los terrenos para la agricultura, de calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, de reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones y de construir los edificios diseñados por los arquitectos hicieron imprescindibles las mediciones y cálculos respectivos. Eran conocimientos geométricos de carácter muy práctico, basados en el uso de algoritmos expresados en forma de recetario.

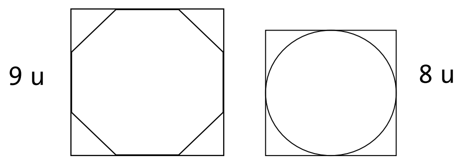
Por ejemplo, obtenían el área de un triángulo isósceles multiplicando la mitad de la base por la altura. Por otra parte, calculaban el área de un círculo aproximándola a la de un octógono. (Colette, 1985: 58).

Antes de continuar

a) Considere el siguiente procedimiento y verifique el valor de ∏ que resulta.

b) ¿Tendría sentido trabajar con el cálculo de áreas aproximadas en la escuela primaria? ¿Por qué?

A partir de un cuadrado cuyo lado mide 9 unidades, se construye un octógono de tal manera que el área de cada uno de los triángulos isósceles rectángulos de las esquinas sea 4 ½ unidades.



Área del cuadrado = 81

Área del octógono = Área del cuadrado – Área de los cuatro triángulos = 81 – 18 = 63

Resulta que el área del octógono difiere poco de la de un cuadrado de lado 8.

El área del octógono difiere poco de la del círculo inscripto en ese cuadrado, por lo que el área del círculo será $(8/9\ d)^2$.

Si bien los papiros proporcionan poca información sobre las propiedades matemáticas de la pirámide de base cuadrada, se sabe que podían calcular su volumen y la pendiente de las caras laterales respecto de la base. La razón entre la base horizontal y su altura (seqt: cotangente del ángulo formado por las caras de la pirámide) era importante para los constructores, ya que debían mantenerla constante en los sucesivos bloques de piedra. Esta cuestión muestra también que la semejanza y la proporcionalidad no les eran desconocidas.

También la Geometría en **Babilonia** estaba íntimamente ligada a las mediciones prácticas, según los textos que nos han llegado. Trataban sobre todo la medición de figuras planas, como el triángulo y el trapecio, y el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas rectos, multiplicando el área de la base por la altura.

Para averiguar la longitud de la circunferencia, multiplicaban el diámetro por 3, es decir que $\prod = 3$.

Estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras y con el teorema atribuido a Thales, según el cual el ángulo inscripto en un semicírculo es recto. También conocían la proporcionalidad de los lados de triángulos rectángulos semejantes y la propiedad del triángulo isósceles según la cual la perpendicular al lado desigual divide al triángulo en dos partes iguales (Colette, 1985: 30).

Sus estudios astronómicos también dieron lugar a la producción de conocimientos geométricos, a partir de la necesidad de anotar y organizar las observaciones en tablas a fin de realizar previsiones.

También disponían de tablas (tablilla 322 de la colección Plimpton) que daban la cosecante para valores entre 30° y 45°, y probablemente también para otros valores (Colette, 1985: 33). El contenido de esa tablilla, centrada sobre todo en las ternas pitagóricas, parece indicar, en función de la columna 4, que estas servían de base para la construcción de ternas trigonométricas.

En Grecia, **Thales de Mileto** (624 a.C. - 548 a.C.) dedicó parte de su vida a estudiar y viajar, lo que le permitió conocer otras regiones del mundo antiguo, en particular, Egipto, sus matemáticas y su astronomía.

En Geometría, se le atribuyen las siguientes proposiciones:

- Cualquier diámetro biseca un círculo.
- Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
- Los ángulos verticales formados por dos rectas que se cortan son iguales.

También diseñó un método para medir la distancia desde la orilla hasta un barco que se encuentra en el mar y el procedimiento para calcular la altura de la pirámide de Keops con la ayuda de un bastón vertical y la idea de triángulos semejantes.

Aunque no hay documentación que lo asegure, se supone que su conocimiento de la producción matemática de su época le permitió "abrir la puerta a una organización racional de la matemática" (Colette, 1985: 70).

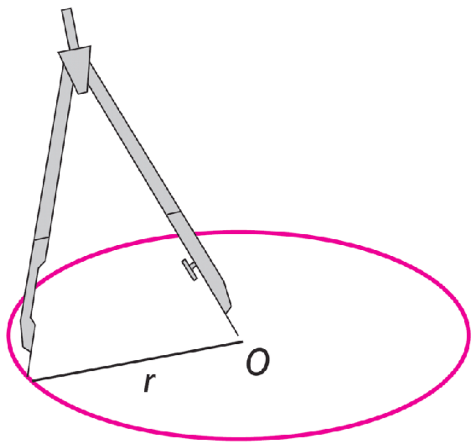
Poco después, **Pitágoras** y sus discípulos (550 a.C. - ?) elaboraron –al menos, se les atribuye a ellos– la demostración de la proposición: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" (que luego fue consignada por Euclides como número 47 del Libro I). También se atribuye a los pitagóricos la construcción de los sólidos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Su teoría de las proporciones, basada en la conmensurabilidad de las magnitudes geométricas, quedó incluida como caso particular de una nueva teoría aplicable a todos los casos (tanto a magnitudes conmensurables como a no conmensurables), luego de que Aristóteles hubiera demostrado que había pares de cantidades no conmensurables entre sí, como el lado del cuadrado y su diagonal.

En este tiempo se asienta definitivamente el concepto de demostración como única vía de establecimiento de la verdad en Geometría.

Después de Pitágoras, los trabajos matemáticos se orientaron hacia la recopilación y organización de los conocimientos que circulaban (Hipócrates de Quíos recopiló uno de los libros y Arquitas, el Libro III). Luego estos fueron una fuente para la construcción de los Libros denominados *Elementos*. La suma de estos libros escritos por **Euclides** (siglo IV a.C.) dio como resultado un tratado que "superó completamente y de forma inmediata" a todos los elaborados en siglos anteriores (Colette, 1985). Además de la tarea de recopilación, realizó una ordenación sistemática de los trabajos anteriores en una sucesión lógica de proposiciones, acompañadas de axiomas, postulados y definiciones.

Como ejemplo, veamos cómo se define "círculo" en el Libro I, proposición 15: "Un círculo es una figura plana, limitada por una sola línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde uno de los puntos interiores de la figura son iguales entre sí" (Colette, 1985: 106).



Aunque no se plantea que "el punto cualquiera" sea el centro y tampoco que "las rectas que caen sobre ella" sean los radios, es clara la idea de equidistancia desde cada punto de la línea y el punto interior. Por otra parte, en el tercero de los cinco postulados se explicita el modo de obtener la figura con compás: "[es posible] describir un círculo desde un punto cualquiera y con una distancia cualquiera"..

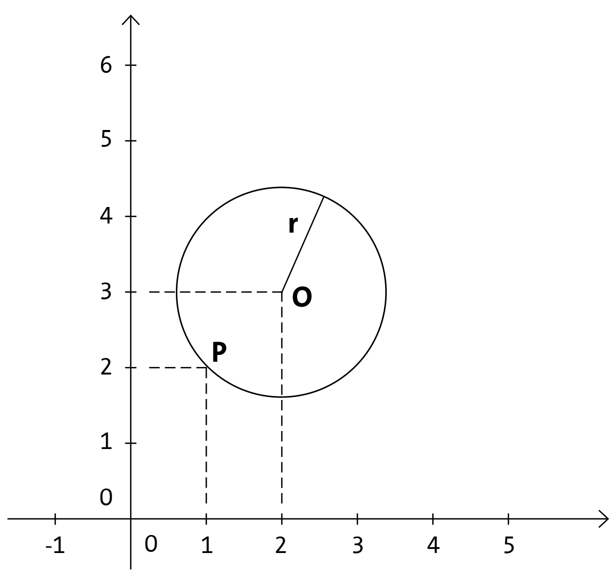
Y después de Euclides...

La Geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la Edad Media. El siguiente paso importante en esta ciencia, lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado *El Discurso del Método,* publicado en 1637, hizo época. Este trabajo estableció una conexión entre la geometría y el álgebra, al mostrar cómo se podían aplicar los métodos de una disciplina a la otra.

Se crea, entonces, otra geometría: la analítica. Se emplea cuando se necesita describir una forma plana como determinada por puntos que ocupan cierta posición, indicada con números. Así, se introduce el sistema de coordenadas cartesianas en el plano, que permite ubicar puntos mediante dos datos: la abscisa y la ordenada. La idea fundamental de la **geometría analítica** es la introducción de las coordenadas, es decir, "números asociados o coordinados con un objeto geométrico que lo caracterizan por completo" (Courant, 2006: 99).

Como ejemplo, veamos cómo, en esta geometría, la circunferencia se expresa mediante una ecuación que indica la condición necesaria y suficiente de cualquier punto *P* que se encuentre sobre la circunferencia *C* de radio *r*, donde *a* y *b* son las coordenadas del punto *O*, centro de la circunferencia.

$$(x - a) + (y - b) = r$$



Sin detenernos a explicar los avances geométricos de los siglos posteriores, queremos señalar el cambio fundamental que se da en el siglo XIX, con el desarrollo de geometrías no euclídeas que surgen al estudiar la independencia del quinto postulado de Euclides. Estas producciones marcan el fin de la concepción del espacio geométrico como espacio físico y, por lo tanto, también de todos los objetos geométricos como modelos de objetos o situaciones de la realidad.

Casi al mismo tiempo y en esta misma línea de independencia del espacio geométrico respecto del físico, se desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones que, aunque es físicamente imposible e inimaginable, tiene un importante número de aplicaciones en las ciencias físicas, en particular, en el desarrollo de teorías de la relatividad. Finalmente, también en el siglo XIX, en la década de 1970, se desarrolló la geometría fractal, que responde a espacios de dimensiones fraccionarias.

Antes de cerrar este apartado, queremos volver sobre los diferentes modos de considerar un mismo objeto geométrico. Hemos visto en esta clase que el círculo puede ser abordado desde diferentes puntos de vista: como una aproximación al cuadrado que lo circunscribe; como un trazo particular con un instrumento particular, el compás; como un lugar geométrico, y también como el conjunto de puntos del plano que satisfacen una ecuación. Del mismo modo, un ángulo puede ser considerado, entre otras formas, como la "inclinación" de una recta respecto de otra (según Euclides); como un giro de cierta amplitud; como la figura formada por dos semirrectas con origen común, o como una región del plano (unión o intersección de semiplanos en la visión de la teoría conjuntista).

Así, desde la perspectiva de su consideración didáctica, es posible tomar cada objeto geométrico asociado a diferentes geometrías y aun a diferentes usos dentro de la misma geometría. En ambos casos nos referimos a diferentes puntos de vista.

Antes de continuar

- Recopile algunas actividades geométricas de ambos ciclos de la escuela y realice un primer análisis para identificar qué idea de "objeto geométrico" subyace.
- Registre qué supuestos de los maestros podrían orientar la elección de esas actividades.

Estos materiales seguramente le serán de utilidad en futuras acciones de capacitación.

¿Qué inferimos acerca del modo de producción y validación de estos conocimientos?

Dado que concebimos la clase de matemática como un espacio de aprendizaje acerca de la Matemática y sus objetos, pero también acerca de sus modos de producción y validación, nos interesa ahora pensar qué características tiene la actividad matemática que dio origen a los conocimientos geométricos.

Si bien es escasa la información al respecto en la bibliografía consultada, a partir de la recopilada aquí podemos suponer un recorrido constructivo de los conocimientos geométricos. Después de una fase experimental, ligada a la resolución de problemas prácticos, los matemáticos sintieron la necesidad de predecir el resultado de experiencias sin realizarlas empíricamente, solo imaginándolas.

En un primer momento, los matemáticos trabajaron con objetos del mundo real; luego esos objetos comenzaron a funcionar como modelos de la realidad. Se trataba, por ejemplo, de un *cuadrado* cualquiera, en lugar de una pared cuadrada concreta; de un *círculo*, en lugar del agujero de un pozo... Las preguntas que se hacían sobre esos objetos y las relaciones que establecían dejaron de apoyarse en la experiencia sobre casos particulares; la elaboración de conjeturas dejó de basarse en mediciones. Se empezaron a resolver casos análogos con procedimientos similares y, luego, a establecer inductivamente reglas para realizar cálculos.

Los griegos, con su espíritu especulativo, reconocieron la diferencia entre los objetos físicos y los conceptos o ideas abstractas, tales como *circunferencia* o *triángulo*. Se ocuparon de objetos ideales, generales, cuyas propiedades los diferenciaban y determinaban. Los "nuevos" objetos podían ser manipulados mentalmente y dibujados con la sola ayuda de la regla y el compás, es decir, podían dibujarse las figuras con ciertos instrumentos y procedimientos que daban lugar al uso de las propiedades que los definían.

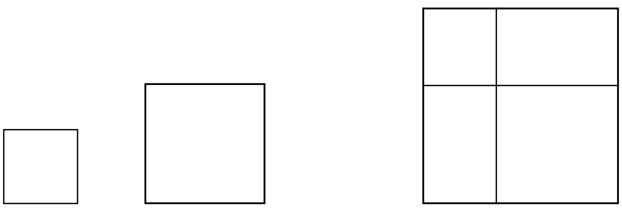
La validez de las afirmaciones dejó de apoyarse en mediciones concretas, y pasó a basarse en razonamientos sobre dibujos, cada uno de los cuales era entendido como un representante particular de una familia de dibujos.

Escultura de bronce de Arquimedes en Treptower Park en Berlin. Gerhard Thieme.

Como comentamos antes, en tiempos de Pitágoras aparece por primera vez la demostración como justificación de la veracidad de un conocimiento, aunque en un comienzo no tenían el carácter de demostraciones formales. Se han encontrado varias demostraciones del teorema de Pitágoras realizadas con dibujos, basadas en equivalencia de áreas. Se considera que esas son figuras genéricas, con medidas que, si bien tienen un valor determinado en el dibujo, podrían ser otras cualesquiera.

Veamos cómo se presentan estas demostraciones en un texto de octavo año de EGB, o segundo año de la escuela secundaria (Chemello et al., 2005: 66). Notemos que hoy, al presentar estas demostraciones, se incluyen expresiones algebraicas para facilitar su interpretación, pero originalmente no formaban parte explícita de los textos.

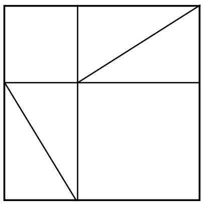
"Cuando se conocen los lados de dos cuadrados, es fácil encontrar el área de un cuadrado cuyo lado sea la suma de los lados de esos cuadrados."

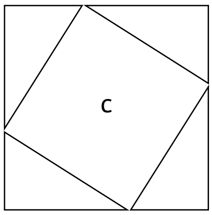


a b $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

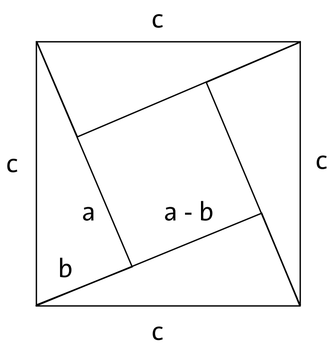
Pero, con los mismos datos, ¿se puede calcular si existe un cuadrado que tenga un área equivalente a la suma de las áreas de los dos cuadrados? ¿Cuánto tendría que medir su lado?

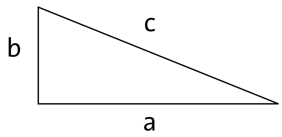
Una manera de resolver el problema es descomponer los rectángulos de la figura anterior, cortándolos por su diagonal *c*, y volver a componer el cuadrado para encontrar algunas equivalencias de áreas:





Colocando la información sobre cada lado, y calculando las áreas del cuadrado y de las cinco figuras cuyas áreas son equivalentes a la del cuadrado, resulta:





$c^2 = (a - b)^2 + 4\ ab / 2$

$a^2 - 2\ ab + b^2 + 2\ ab = a^2 + b^2$

Sin embargo, aún no estaban dadas las condiciones en tiempos de Pitágoras para que una demostración tuviera un sentido axiomáticamente válido hoy. ¿Por qué? Desde el punto de vista lógico, si se quiere establecer una organización ordenada de los conocimientos, una demostración debe partir de una o varias hipótesis para obtener una tesis, cuya veracidad dependerá tanto de la validez del razonamiento con el que se ha extraído (esto fue estudiado por Aristóteles en su Lógica), como de la veracidad de las hipótesis. Por lo tanto, debemos partir de hipótesis ciertas para poder afirmar con rotundidad la tesis. Por otro lado, para poder determinar la veracidad de las hipótesis, habrá que considerar cada una como tesis de otro razonamiento, cuyas hipótesis deberemos también comprobar. Se entra aparentemente en un proceso sin fin en el que las hipótesis se convierten en tesis a probar.

Finalmente, Euclides logra zanjar la cuestión al proponer un sistema de estudio en el que se da por sentada la veracidad de ciertas proposiciones "por ser intuitivamente claras", a partir de las cuales se pueden deducir todos los demás resultados.

Ahora bien, el rol de la demostración como forma de validación y el del método axiomático como forma de sistematización de los conocimientos han tenido en la enseñanza un lugar central en la presentación de los conocimientos a los alumnos. De este modo, se ocultaba la actividad matemática productora de conocimientos y el denominado aspecto social de la demostración, es decir, su aceptación como forma válida por una comunidad. En relación con el proceso de producción, dice Courant (2006: 251): "El pensamiento constructivo guiado por la intuición es la verdadera fuente de la dinámica matemática [...] es una falacia peligrosa creer que la axiomática constituye la esencia de la matemática [...]".

En este sentido, debemos considerar la actividad matemática en la escuela como una actividad humana, propia de una comunidad de producción, situada histórica y culturalmente, y cuyo propósito central es resolver problemas. Entonces, tal como ha ocurrido en diferentes épocas en una misma comunidad matemática, se debe tener en cuenta que serán distintos los tipos de tareas que esas resoluciones requieren, las formas de representación utilizadas, los criterios para validar las propiedades tomadas como punto de partida, las formas de validar los conocimientos construidos a partir de ellas y los niveles de generalidad de las propiedades a las que se arriba.

¿Qué geometría en la escuela primaria?

Volvamos a pensar en los objetos de enseñanza del campo geométrico y los modos de acceder a ellos, en una escolaridad obligatoria. Es posible hacerlo, en principio, analizando el desarrollo histórico que hemos reseñado antes. Como ya planteamos en la Clase 4, es posible hacer una mirada didáctica sobre la historia, considerando las analogías entre los procesos de construcción histórica y los procesos de aprendizaje de un saber en particular (o de un campo de saber). Por lo tanto, es de suma utilidad analizar la génesis escolar nutriendo la mirada en la génesis epistemológica.

Es central que, como capacitadores, podamos argumentar frente a los maestros que la geometría a enseñar en la escuela primaria debe incluir el trabajo con objetos geométricos considerados desde el punto de vista euclidiano, es decir, como modelos del espacio físico.

Esta modelización toma como punto de partida la relación del niño con el espacio sensible en el que vive, que constituye su primer campo de experiencias. Debería evolucionar hacia aquel que no adquiere más que por vía del aprendizaje, esto es, el espacio geométrico en el sentido euclidiano.

En la escuela primaria, se comienzan a abordar algunos problemas con un trabajo intramatemático sostenido. Las primeras propiedades de las figuras se obtienen a partir de la experiencia con figuras modelizadas (plegados, superposiciones), o a partir de la reflexión sobre construcciones de distinto tipo (que serán consideradas y analizadas en la Clase 15). Sin embargo, su desarrollo y profundización se realiza en los primeros años de la escuela secundaria.

Del mismo modo, considerar las figuras en el plano cartesiano se puede iniciar en los últimos años de la primaria, dejando su representación como ecuación para la escuela secundaria.

Cabe preguntarse por la caracterización del tipo de trabajo geométrico que se realizará en la escuela primaria. Es posible buscar una respuesta revisando las diferentes formas de concebirlo. Algunos trabajos recientes toman en cuenta tanto la naturaleza de los objetos que intervienen (espaciales, espacio-gráficos, teóricos), como las tareas que realizan los sujetos (acción, anticipación, deducción) y la naturaleza de las formas de validación (mediante la práctica, la medición o el razonamiento, exclusivamente). En estos trabajos se distinguen tres concepciones diferentes[2]: una aproximación concreta al espacio, una geometría basada en situaciones concretas modelizadas por representaciones, y una geometría teórica.

Para el nivel primario, es posible considerar la segunda de las aproximaciones mencionadas:

> "[...] una geometría que se apoya en situaciones concretas modelizadas por representaciones (planas o tridimensionales de objetos y en situaciones planteadas sobre las figuras y cuerpos), donde los problemas no pueden ser resueltos simplemente por la acción, y donde los procedimientos suponen una anticipación sobre los objetos idealizados. Estos procedimientos requieren, en general, del uso de instrumentos y recurrir a las propiedades asociadas a ellos y a razonamientos. Las formas se analizan progresivamente. Si bien la validación práctica es posible, en muchas situaciones la validación de las producciones puede privilegiar el análisis de razonamientos".
>
> ERMEL (2006: 21).

[2] Citado en ERMEL como derivado de Houdement C., y Kuzniak, A. "Formation des maitress et paradigmas géométriques", *RDM* vol 20/1, *La penseé Sauvage*, Grenoble, 2000.

Otra cuestión importante para la capacitación, en relación con el enfoque de enseñanza que venimos planteando, es cómo plantear problemas relacionados con la geometría que otorguen sentido a los conocimientos que se enseñan y cómo abrevar en los problemas históricos para elaborar situaciones de enseñanza. Como veremos en las Clases 14 y 15, es posible proponer problemas de diferentes tipos que den lugar a la producción y validación de nuevos conocimientos.

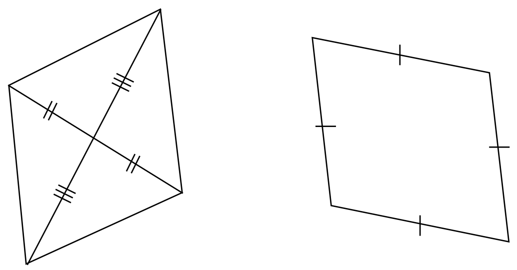
La reseña histórica que realizamos también nos da argumentos acerca de la inconveniencia de comenzar la enseñanza con la "definición" de las nociones de punto, recta y plano, al estilo de los *Elementos* de Euclides. En efecto, su trabajo de sistematización y ordenamiento no fue un punto de partida, sino que sucedió a muchísimos años de producción de nociones –de "objetos y relaciones geométricas"– vinculados a problemas de distinto tipo, por un lado, y de avances en las formas particulares de trabajar con ellos, por otro.

En relación con esta cuestión del lugar de la definición en el trabajo geométrico, es importante trabajar en la capacitación una cuestión más: la idea de que todo objeto matemático –y, en particular, las figuras y cuerpos geométricos– no solo puede ser considerado desde distintos puntos de vista, sino que además puede ser definido de varias formas posibles, aun desde un único punto de vista.

Señalamos que en la geometría euclidiana, para asegurar la validez de una afirmación era necesario apoyarse en otras afirmaciones ya validadas, tomadas como definición. En ese marco, es posible considerar, por ejemplo, diferentes definiciones de rombo utilizando diferentes propiedades, y derivar las demás.

En efecto, si se considera que un *rombo* es "un paralelogramo cuyas diagonales son perpendiculares", es posible derivar de allí la congruencia de sus lados, ya que las diagonales lo dividen en cuatro triángulos rectángulos que resultan congruentes, puesto que los catetos respectivos son congruentes, por ser las mitades de las diagonales de un paralelogramo (congruencia de triángulos rectángulos).

Pero si se considera que un *rombo* es "un paralelogramo con cuatro lados congruentes", entonces se puede derivar que sus diagonales son perpendiculares, ya que está formado por dos triángulos isósceles con un ángulo comprendido congruente, por ser opuestos de un paralelogramo (congruencia de triángulos).



Este tipo de reflexiones en la capacitación fortalece la idea de que en la escuela primaria es más importante presentar problemas que permitan asociar las figuras geométricas con un conjunto amplio de propiedades, que trabajar con definiciones vinculadas a ellas.

Será un propósito de la enseñanza en la primaria lograr que los alumnos vayan concibiendo las figuras como tales, que avancen en el aprendizaje de nuevas propiedades y que proporcionen diversos tipos de pruebas –en términos de Balacheff – para verificar sus afirmaciones. Asimismo, en la capacitación convendrá ofrecerles a los maestros la oportunidad de realizar una práctica geométrica como la que deberán promover en sus aulas, ya que este tipo de trabajo resulta de estudios didácticos recientes sobre la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.

Por último, una cuestión ineludible en la capacitación es pensar cómo hacer para que los maestros adviertan la centralidad de los conocimientos geométricos en la formación de los niños que incluyan no solo los problemas ligados a las medidas. Abordaremos este tema en la Clase 15.

Actividad obligatoria

a) De modo similar a lo realizado en esta Clase para el círculo, considere la noción de *triángulo* y explicite tres definiciones, desde distintos puntos de vista.

b) Para esa noción, haga un listado de los tipos de situaciones que se incluyen en los NAP de segundo ciclo, nivel primario, y las propiedades de los triángulos involucradas en ellas.

c) Dado que en este módulo tendrá que planificar actividades para un encuentro de asesoramiento en las escuelas, busque un libro de texto que se use en su región/provincia e identifique qué "definición" de triángulo y qué tipos de situaciones de las listadas en el punto *b)* aparecen.

[3] Tomamos como referencia el artículo "Procesos de prueba y situaciones de validación", *Educational Studies* in Matematics 18, 147-176 Brousseau (1986), incluido como bibliografía en Enseñar a demostrar, una tarea posible. Chemello – Crippa. Biblos, 2011.

Referencias bibliográficas

Berthelot, R. y M. Salim (1994), “La enseñanza de la geometría en la escuela primaria” en *Grand N* Nº 53, 1993/1994. Traducción: B. Capdevielle; L. Varela; P. Willson. Para el Programa de Transformación de la Formación Docente. Dirección Nacional de Gestión de Programas y Proyectos. Ministerio de Cultura y Educación.

Colette, J.-P. (1985) *Historia de las Matemáticas 1*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Courant R. y H. Robbins (2006) *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Chemello, G., M. Agrasar, A. Crippa y A. Díaz (2005) *Matemática 8. Anexo teórico*. Buenos Aires: Editorial Longseller.

Chevallard, I. (1991) *Autour de l’enseignement de la géometrie au college*. Petit X Nº 27. IREM de Grenoble.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problémes au cycle 3*. INRP. Paris: Hatier.