Clase virtual Nº 10

La planificación de la enseñanza en el segundo ciclo de la escuela primaria.
El caso de las fracciones

Autores: Graciela Chemello, Mónica Agrasar, Silvia Chara y Analía Crippa
Equipo Áreas curriculares del Ministerio de Educación

Introducción

El análisis de la enseñanza de las fracciones y los números decimales en la escuela primaria implica considerar una problemática central para su tratamiento en la capacitación: los criterios de secuenciación de los contenidos a lo largo del Segundo Ciclo. Si los capacitadores conocen estos criterios, podrán debatir acerca de ellos con los maestros y, de esta manera, contribuir a la articulación de proyectos institucionales en el área más fuertes e inclusivos.

Como hemos planteado en la Clase 7, la enseñanza de fracciones responde, muchas veces, a una secuencia sumamente instalada, orientada hacia el dominio de los algoritmos. En primer lugar, se presentan unos pocos ejemplos basados en la división de un entero en partes iguales, con la ayuda de acciones concretas y de representaciones gráficas que permiten ligar los objetos propuestos con ciertos usos cotidianos; luego, se tiende a trabajar inmediatamente el lenguaje simbólico de las fracciones y las reglas para compararlas y operar con ellas. Este tipo de aprendizaje impide que los niños logren apropiarse del sentido de estas nociones. Tal organización de la enseñanza da cuenta de un criterio de progresión de lo concreto a lo abstracto. Aun en el caso de que los niños logren un manejo "exitoso" de esas reglas, tienen serias dificultades de comprensión. Esto se debe a que desconocen su fundamentación, porque, muchas veces, los maestros tienen algunas dificultades para explicarla.

A su vez, en la enseñanza de los números decimales habitualmente no se hace referencia a su condición de "objetos" de un nuevo campo numérico, sino que se los deriva de las fracciones decimales. Los docentes se centran en la extensión de los algoritmos de las operaciones ya trabajados con números naturales y en algunas reglas para ubicar las "comas".

Para que los niños logren construir el sentido de los conocimientos matemáticos, es necesario que resuelvan problemas de distinto tipo y reflexionen sobre lo producido. Esta construcción se dará a partir de la evolución de sus concepciones –como señalamos en la Clase 8–. Los alumnos podrán, entonces, avanzar desde una primera idea ligada al uso social de las fracciones como expresiones de una medida (como los medios y los cuartos de las unidades de peso y de capacidad utilizados en la vida cotidiana), hacia una concepción que vincule la idea de fracción como cociente de enteros.

En el caso de los números decimales, la evolución de las concepciones parte de la idea de que estos representan medidas de partes cada vez más pequeñas de una unidad, hasta llegar a entenderlos como otra representación del cociente de enteros.

Estos avances dependen de la enseñanza escolar más fuertemente que lo que ocurre con otros contenidos, dado el escaso uso de las fracciones en la vida extraescolar y la utilización casi exclusiva de los decimales para expresar medidas.

Nos preguntamos, entonces: ¿cuáles podrían ser, según el enfoque que venimos desarrollando, algunos criterios para organizar una enseñanza de las fracciones y de los números decimales que promuevan el cambio de las concepciones iniciales?

En los apartados siguientes nos ocuparemos de analizar criterios derivados de:

- la relación con los conocimientos abordados en años anteriores;
- los problemas en los que intervienen y los diversos significados ligados a ellos;
- las representaciones que permiten manipularlos (compararlos, sumarlos, etc.), también en articulación con los contextos de uso, y
- las herramientas, propiedades, relaciones y formas de “hacer” (calcular) que permiten manipular estos números.

La relación con los conocimientos tratados en años anteriores

Un primer criterio para organizar la enseñanza en todo el ciclo es considerar qué relación tienen los nuevos conocimientos que se van a trabajar con aquellos que los alumnos conocen de años anteriores. Para muchos temas “nuevos”, el abordaje se planifica teniendo en cuenta que los alumnos pueden apoyarse en sus conocimientos previos, de modo de ampliar aquello que ya saben.

En el caso de las fracciones, es la primera vez que los alumnos se enfrentan a un mecanismo típico de la actividad matemática: producir nuevos objetos cuando los que se tiene no son suficientes para resolver el problema planteado. Así, dado que se conocían números que permitían contar –los naturales– y con los que se podía resolver todas las sumas y multiplicaciones, pero no todas las restas y las divisiones, y gracias a la necesidad de expresar medidas y de resolver divisiones para todo par de números naturales, fue necesario generar nuevos números, que permitieran dar respuesta a ambas cuestiones: las fracciones.

Es decir que, a partir de una operación no permitida (la división entre cualquier par de números naturales), se "decide" que dicha operación es un número. La idea de que una operación es al mismo tiempo un número resulta muy difícil de comprender para los alumnos y se necesita de mucho tiempo para que la elaboren.

Aunque esta idea no sea planteada de este modo a los alumnos desde un principio, es bueno que los maestros tengan conciencia de esta complejidad y de la ruptura que plantea el aprendizaje de las fracciones en relación con los números naturales, ya que todas las diferencias de funcionamiento entre naturales y racionales generan errores y dificultades en los alumnos.

Es pertinente que los capacitadores llamen la atención de los maestros sobre el hecho de que mediante la realización de diversas actividades, los alumnos llegarán a conceptualizar las fracciones como números. También es importante tener en cuenta que, al planificar la enseñanza a lo largo de todo el ciclo, es necesario incluir actividades que permitan hacer explícitas las diferencias con los números naturales, acompañando el proceso de aprendizaje de este nuevo campo numérico.

Actividad opcional

Le sugerimos leer los *Cuadernos para el aula* de sexto y séptimo grado, en los que aparecen ejemplos de actividades que pueden ser discutidas con los maestros durante la capacitación y que permiten analizar las diferencias entre comparar fracciones y decimales entre sí, por un lado, y comparar números naturales, por otro.

En *Cuadernos para el aula, Matemática 6* (p. 42, disponible en http://www.me.gov.ar/curriform/nap/matematica06.pdf), se propone una actividad para comparar números decimales, que también puede adaptarse para trabajar con fracciones; mientras que en *Leer, escribir y argumentar* de séptimo grado (pp. 30-33, disponible en http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL002722.pdf) se plantea la actividad "Si cambian los números, ¿valen las mismas propiedades?", que avanza en este mismo sentido.

Los significados de las fracciones y sus operaciones

Analizaremos en este apartado qué significados de las fracciones se enseñan en la escuela primaria y cómo organizar una posible progresión en el ciclo. Ya mencionamos en la Clase 8 que, al planificar la enseñanza, es necesario considerar los diferentes significados, porque cada conjunto de problemas asociados a una forma de "funcionamiento" de las fracciones muestra distintos aspectos del concepto, y comprender uno de los aspectos de las fracciones no implica comprender los otros. A su vez, también es posible distinguir distintos significados en el caso de las operaciones aritméticas.

Cuando planteamos el trabajo con números naturales en la Clase 5, analizamos los diferentes significados de las operaciones en ese campo numérico. Sin embargo, no nos referimos allí a los significados de los números naturales que, como sabemos, permiten expresar la cantidad de elementos de una colección (significado cardinal) y una posición en una colección ordenada (significado ordinal). Ocurre que, en los problemas planteados para operar con esos números, el significado es fundamentalmente cardinal.

Como ya hemos planteado, en las prácticas habituales se "entra" a la noción de fracción como parte de una unidad (lo que llamamos el significado parte-todo en la Clase 8). De esta manera, se indica una relación con la unidad fraccionada en n partes (1/n) y luego se propone la fracción m/n como m veces 1/n, lo que dificulta el trabajo con fracciones mayores que 1 y su ubicación entre enteros.

Otros significados de la noción de fracción –reparto, medición, y proporcionalidad– son objeto de enseñanza en la escuela primaria, tal como está señalado en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Estos permiten trabajar en la clase con una variedad de fracciones (mayores y menores que la unidad, iguales a enteros), sin necesidad de clasificarlas. Se enriquece así la noción, ya que no se la limita inicialmente a las fracciones menores que la unidad.

En esta clase también nos ocuparemos brevemente de ver qué significados de las operaciones con fracciones se plantean en la escuela primaria.

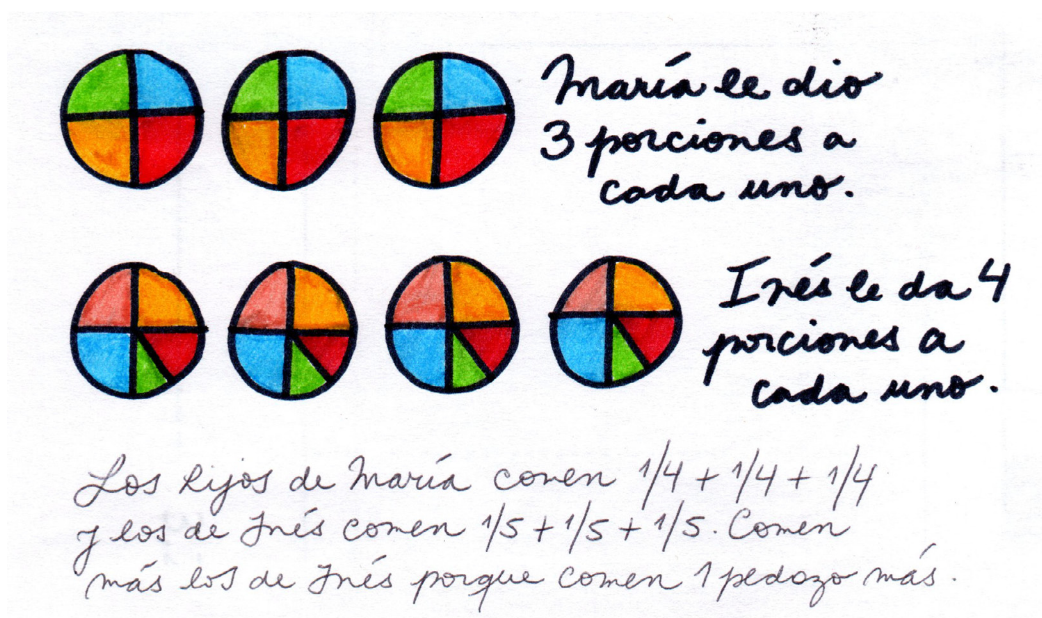
En cuanto a los números decimales, dado que son expresiones de las fracciones en otro registro de representación, sus significados y los de sus operaciones no difieren de los planteados para las fracciones, aunque en algunos contextos es habitual utilizar una de las dos. Por ejemplo, decimos media hora y no 0,5 de hora; 800 g y no 4/5 kg; treinta pesos con cincuenta ($30,50) y no treinta pesos y medio.

¿Cuándo y mediante qué problemas presentar cada uno de los tres significados? ¿Qué significados de las fracciones intervienen en los problemas que dan sentido a cada una de las operaciones en este campo numérico?

Los problemas en los que las fracciones son el resultado de un reparto pueden plantearse en cuarto grado, continuando lo trabajado acerca de la división en tercero; los de medida, en quinto. Sin embargo, ambos se pueden mantener a lo largo de toda la primaria. Estos contextos permiten establecer, por un lado, comparaciones entre fracciones y, por otro, relaciones de mayor/menor y de equivalencia entre ellas.

Tomemos un ejemplo extraído de *Cuadernos para el aula, Matemática 4* (p. 59):

> *María tiene tres tortas iguales para repartir entre sus cuatro hijos. Inés tiene cuatro tortas iguales a las de María para repartir entre sus cinco hijos. ¿Comen más los hijos de María o los de Inés?*



Asimismo, las fracciones como resultado de un reparto o de una medición permiten plantear problemas que dan sentido a la suma y a la resta de fracciones. Ambas operaciones conservan en este campo numérico los significados que tenían en los naturales. Efectivamente, las partes y las medidas se pueden agregar, quitar, unir, complementar, cuidando siempre el sentido y la verosimilitud de los contextos elegidos, dado el restringido uso de las fracciones en la vida cotidiana.

Veamos otro ejemplo, tomado de *Cuadernos para el aula, Matemática 5* (p. 96).

En la heladería de Rocío, todos los días usan frutillas para hacer helado. Pero como a veces incorporan gustos nuevos, compran más de lo que necesitan para poder experimentar recetas y muchas veces les sobran frutillas para el día siguiente.

1. Para hacer el helado de frutillas utilizan 5 kg de frutillas todos los días. Del día anterior quedaron 4 bandejas de $\frac{1}{2}$ kg y 9 bandejitas de $\frac{1}{4}$ kg; ¿les alcanza con lo que tienen o necesitan comprar más?

2. En cambio otro día la situación fue distinta: les habían quedado del día anterior 7 bandejas de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Les alcanza para completar los 5 kg para el helado de frutillas?

3. Manuel, para ayudar a Rocío, fue a hacer el pedido, pero necesita saber cuántos kilos de frutilla le faltan para completar los 5 kg diarios. Tiene una bandeja de $\frac{3}{4}$ kg, otra de $\frac{1}{2}$ kg, otra de 1 kg y una chiquita de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuánto tendrá que pedir Manuel al vendedor?

4. El jueves el proveedor les dejó 9 bandejitas de $\frac{1}{2}$ kg y 9 de $\frac{3}{4}$ kg; ¿para preparar el helado de frutillas de cuántos días les alcanza?

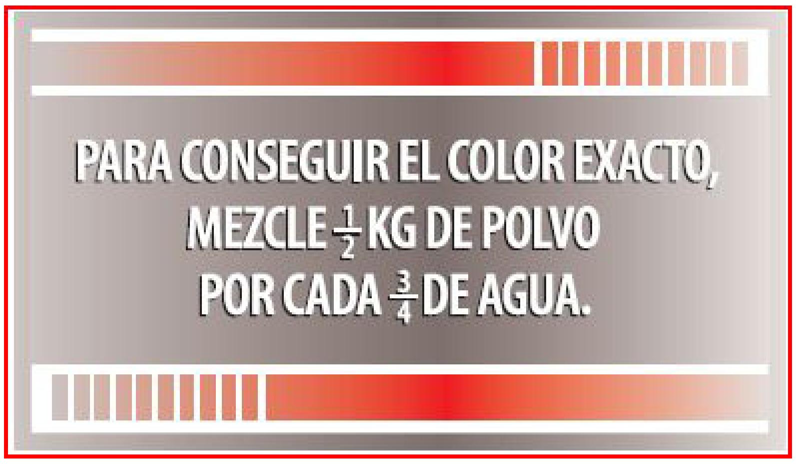
Los problemas donde las fracciones se usan para expresar una constante de proporcionalidad se introducen en sexto grado. Estos problemas implican, en primera instancia, la comparación de razones entre magnitudes. Por ejemplo:

> *Un pintor prepara un color usando 3 litros de pintura blanca con 2 litros de pintura azul. Su ayudante piensa que no le va a alcanzar y le agrega 1 litro más de cada color. ¿Piensan que quedó el mismo tono de azul?*

Luego, al presentar otros problemas, es posible considerar la variación de una magnitud respecto de otra y la constante de esa variación.

La siguiente actividad está sacada de *Cuadernos para el aula, Matemática 6* (pp. 76-77):

Antes de preparar la pintura, Carlos lee las siguientes instrucciones:



a. ¿Qué cantidad de agua necesita Carlos si usa 1 kg de polvo?
b. ¿Y si usa1/4 kg de polvo?
c. ¿Y si usa 3/4 kg de polvo?

¡Una ayudita! Podés construir una tabla como la siguiente:

Cantidad de polvo en kg	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
Cantidad de agua en litros	$\frac{3}{4}$			

Luego de resolver este problema, sería necesario incluir preguntas de este tipo, que permitieran explicitar la constante y su función:

a. ¿Cómo pude hacer Carlos para calcular en forma rápida cuánta agua poner para cualquier cantidad de polvo?

b. ¿Cómo calcula cuánto polvo necesita para cualquier cantidad de agua?

En los problemas de proporcionalidad, antes de trabajar con una constante de proporcionalidad fraccionaria, habrá que presentar situaciones con constante de proporcionalidad natural y cantidades expresadas con fracciones, a partir de cuarto grado.

En cuanto a la constante de proporcionalidad fraccionaria, se podrán plantear en sexto grado problemas cuyas medidas estén expresadas con números naturales y luego con fracciones o decimales. En este último caso, habrá que resolver multiplicaciones y/o divisiones usando estas expresiones.

Es importante señalar también que no todos los significados atribuidos a la multiplicación y a la división con números naturales valen para el caso de las fracciones y los números decimales. Para estas operaciones y estos números, los tipos de problemas posibles son dos. Por una parte, aquellos donde se establece una relación de proporcionalidad entre dos medidas con constante fraccionaria. Por otra, aquellos en los que se multiplican dos medidas –problemas que requieren calcular áreas o volúmenes–. Estos últimos implican una doble proporcionalidad. Por ejemplo, el área del rectángulo crece en forma proporcional tanto al aumento de la base como al de la altura.

Estos problemas ofrecen una diversidad de alternativas para elegir no solo los contextos y las magnitudes, sino también las tareas que los alumnos deberán realizar.

En la capacitación, sería pertinente discutir con los maestros que el alcance del significado de fracción como constante de proporcionalidad y, en consecuencia, los problemas de multiplicación y división deberían ser adecuados a las posibilidades de los alumnos. Es muy posible que en sexto grado algunos tengan dificultades para comprender relaciones entre magnitudes pocos familiares para ellos, como es el caso del peso específico o de la velocidad, expresados en diferentes unidades. La adecuación implicará la elección de magnitudes significativas tales como la cantidad de azúcar en función del peso de un alimento, la cantidad de kilómetros recorridos en un cierto tiempo, el precio por kilo, la distancia en un plano y en la realidad, entre otros.

El siguiente ejemplo está tomado de *Cuadernos para el aula, Matemática 6* (pp. 79-80):

Un caminante recorre 5 km en 2 horas. Suponiendo que mantiene la velocidad de la marcha, completá la tabla que sigue:

Tiempo de marcha del caminante en hs	2	4	6	$\frac{3}{4}$
Distancia recorrida en km	5			

En la siguiente tabla, se muestra el consumo de nafta de un automóvil al recorrer cierta cantidad de kilómetros. Completá la tabla sabiendo que el automóvil consume lo mismo por cada kilómetro recorrido.

Kilómetros recorridos	1	2	3	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Consumo de nafta en litros	$\frac{1}{10}$					

Si se piensa en la articulación de estos conocimientos en el siguiente nivel educativo, es necesario advertir que el significado de la fracción como cociente de enteros es objeto de enseñanza en los primeros años de la escuela media, en contexto intramatemático, y resulta más general que los tres señalados para la escuela primaria.

El repertorio

Un criterio para organizar la enseñanza en los distintos grados o para variar los conjuntos de problemas en un mismo grado es considerar cuáles son los números que intervienen en los problemas. Esto se articula con el criterio de los significados de las fracciones. En ese sentido, así como con los naturales se va ampliando el dominio numérico con el que se trabaja, de la misma manera se puede ampliar sucesivamente el repertorio de fracciones que se incluyen en los problemas.

Un primer conjunto está formado por los medios, los cuartos y los octavos. Por ejemplo: 1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, ...; 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, 5/4, 6/4, ...; 1/8, 2/8, 4/8, ...; o sus expresiones equivalentes: 1, 1 y 1/4, 1 y 1/2, 2, 2 y 1/2, etc. Muchas de ellas son conocidas por el uso social de medidas de peso y capacidad, y propuestas en tercer grado, según lo planteado en los NAP. En cuarto grado, se puede iniciar el tratamiento de las fracciones proponiendo problemas de reparto con estas mismas fracciones.

Otro conjunto de fracciones más amplio incluye además los tercios, los sextos y los doceavos, por una parte, y los quintos y décimos, por otra. Así como los cuartos se han presentado como “la mitad de la mitad” en los problemas en el contexto de las medidas de peso y capacidad en tercero, en cuarto grado los sextos pueden aparecer en los problemas de reparto como “la mitad de la tercera parte” o “la tercera parte de la mitad” y los doceavos, como “la tercera parte de los cuartos” o “la mitad de los sextos”. Del mismo modo, los décimos pueden mencionarse como “la mitad de un quinto” o “la quinta parte de un medio”.

En los problemas de medida en quinto grado, el repertorio podrá ser inicialmente restringido a las fracciones ya conocidas para encontrar la medida –primero entre dos longitudes y luego entre dos áreas–, subdividiendo sucesivamente en mitades. En el caso de las áreas, variar la forma del entero permitirá incorporar al repertorio otras fracciones.

En cuanto al repertorio para sexto grado, es posible incluir los centésimos y milésimos, tanto en los problemas donde las fracciones se usen como constante de proporcionalidad, como en los de reparto y medida.

Las tareas y los modos de funcionamiento de los conocimientos

Variar los modos de funcionamiento de los conocimientos y las tareas que se proponen a los alumnos son otros criterios que pueden tenerse en cuenta y articularse con el referido antes en el momento de seleccionar los conjuntos de problemas.

Cuando planteamos los distintos modos de funcionamiento de los conocimientos en la Clase 8, mencionamos tres alternativas: un funcionamiento implícito, en la acción, y otros dos explícitos, en la comunicación de procedimientos o formulación de conclusiones y en la argumentación para dar razones de lo realizado.

Cabe señalar que, para cualquiera de las tres alternativas, será igualmente importante incluir actividades en las que los alumnos tengan la oportunidad de realizar producciones y de analizar las producciones de otros. Por ejemplo, podrán realizar procedimientos de cálculo y analizar los producidos por otros, comunicar un procedimiento en un mensaje o interpretar un mensaje de otro, y elaborar argumentos o considerar los de otros, para acordar o disentir, dando razones de ello.

Con respecto a los tipos de tareas, nos referimos a distinguir el trabajo del alumno, como se presenta en los casos siguientes. Por ejemplo, en un problema de proporcionalidad, dos tareas diferentes serían buscar la constante (dados uno o varios pares de medidas relacionadas) o hallar alguna de las medidas relacionadas (cuando está dada la otra y la constante). También serían tareas diferentes reconstruir el entero (dado el resultado de un reparto y el número de partes) o encontrar la parte (dada la cantidad a repartir).

Estos criterios permiten organizar secuencias que incluyan una variación pertinente en el conjunto de problemas que se elige para cada año, o diferenciar el trabajo en distintos grados de la escuela primaria con un mismo significado.

En el ámbito de la capacitación será central analizar con los maestros problemas con cada uno de estos significados y ver cómo avanzar con el repertorio en función de los conocimientos disponibles de sus alumnos. También será sumamente importante dedicar un tiempo para que los maestros del ciclo puedan establecer acuerdos acerca del alcance y el tipo de trabajo que se realizará en cada grado, sin que se superpongan y repitan las propuestas. Por otra parte, habrá que proponer ejemplos que muestren la importancia de cuidar la relación entre el repertorio de fracciones y decimales que se incluye y el contexto del problema, de modo de no alterar la verosimilitud de la situación y el sentido de resolverla.

Las diferentes formas de representación

En relación con el dominio de las distintas representaciones para los números racionales, en los NAP se propone que, al finalizar séptimo grado, los alumnos "[...] argumenten sobre la equivalencia de diferentes representaciones de un número, usando expresiones fraccionarias y decimales finitas, descomposiciones polinómicas y/o puntos en la recta numérica". Sin embargo, y tal como afirmábamos en la Clase 7, muchas veces el tratamiento escolar de las expresiones fraccionarias y decimales se mantiene desarticulado hasta el momento en el que se aprenden las reglas para "pasar" de fracción a decimal y viceversa. Nos preguntamos, entonces: ¿cómo organizar la enseñanza en el ciclo para que, a la vez que se aprenden los modos de tratamiento propios de cada representación, se pueda avanzar hacia su articulación?

Hemos visto que, desde cuarto grado, las situaciones de reparto equitativo y exhaustivo de unidades que se pueden dividir constituyen una fuente de interesantes problemas. Estos involucran realizar y comparar particiones de enteros, y cuantificar las partes en relación a una unidad, utilizando escrituras fraccionarias para expresar los resultados de los repartos.

Así, por ejemplo, como vimos en la Clase anterior, al repartir 10 chocolates entre 3 niños, a cada uno le tocan 3 chocolates y 1/3, o 10 veces 1/3 de chocolate, o 10/3 de chocolate. Se podrá discutir entonces la equivalencia entre:

$3\ 1/3 \qquad 3 + 1/3 \qquad 10 \times 1/3 \qquad 10/3$

Vemos, por lo tanto, que las expresiones con fracciones –incluso aquellas con signos de suma y de multiplicación– aparecen en la clase como respuesta a una misma situación. Esto permite debatir sobre el tipo de números utilizado en cada caso y el significado que estos tienen en la situación.

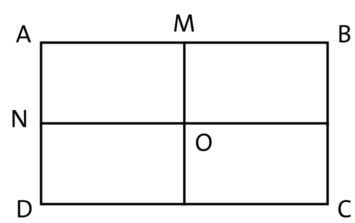
Por ejemplo, como cada 3/3 se forma un entero, con 10/3 se forman 3 enteros y queda un tercio más; entonces: 10/3 = 1 1/3. También se puede notar que lo que le toca a cada uno es lo mismo ya sea que se divida cada chocolate en 3 y se le dé una de esas partes 10 veces, o que se den 3 a cada uno y luego el que queda se divida en 3 y se agregue a lo anterior; entonces: 10 x 1/3 = 3 + 1/3.

Esta variedad de escrituras, junto con el uso de las propiedades de las operaciones, será el punto de apoyo para la construcción de procedimientos de cálculo "originales" (para los alumnos). En ese sentido, resulta vital explorar primero –y flexibilizar después– el uso de distintas expresiones fraccionarias para registrar una misma cantidad, lo que tendría que estar disponible al finalizar quinto grado, al menos para un repertorio básico. De otro modo, cuando se proponga un problema a los alumnos que requiera operar con estas expresiones, no habrá ninguna alternativa disponible.

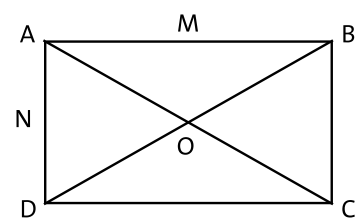
Este tratamiento es claramente distinto a la "presentación" tradicional, que genera una concepción cerrada y un manejo poco flexible de la escritura fraccionaria. La comparación posterior de distintos repartos lleva a descubrir el hecho de que fracciones distintas pueden expresar una misma cantidad, producto de distintos repartos, como por ejemplo el de 3 alfajores entre 4 y el de 6 entre 8.

Admitir que una misma cantidad puede escribirse con diferentes números es todo un desafío para los alumnos de cuarto grado –recordemos que, en ese momento, la idea de número refiere, para los niños, solo a los naturales–. Para superarlo, no basta con poder hallar una fracción equivalente a otra dada multiplicando numerador y denominador por un mismo número. Resulta necesario en la capacitación discutir con los maestros el alcance y el tipo de trabajo que se presenta en cuarto y quinto grado en relación con las fracciones equivalentes. Esta idea de equivalencia –que a veces se reduce a conocer una regla de cálculo– es central tanto para comprender los procedimientos de comparación y cálculo como para avanzar, a futuro, en la conceptualización del número racional como cociente.

Ya en quinto grado, en otros problemas, la fracción expresa la medida de una longitud o de un área. Así, para un área rectangular pueden usarse unidades de formas diversas y congruentes o no entre sí. Por ejemplo:

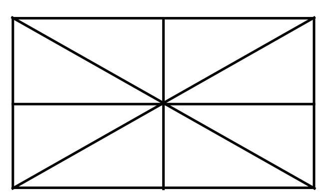


4 x Área AMON = Área ABCD

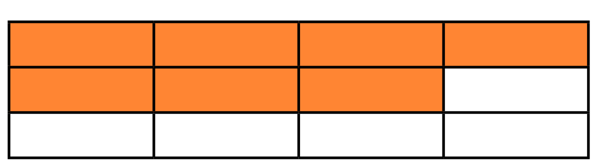


Área AOD = 1/4 Área ABCD

En el primer ejemplo, la relación “se ve” claramente; mientras que, en el segundo, es necesario comprobar la equivalencia de los distintos cuartos recurriendo, por ejemplo, a una nueva subdivisión:



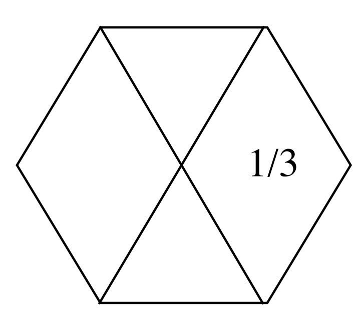
En estas situaciones, es posible plantear la comparación entre el área total del rectángulo y una parte pintada. Eso permitirá el debate sobre las diversas formas de escribir aquella parte, retomando la cuestión de las escrituras equivalentes de una misma fracción. Por ejemplo, a partir de un rectángulo que presente 7 de sus 12 partes iguales pintadas, podrían surgir escrituras como:



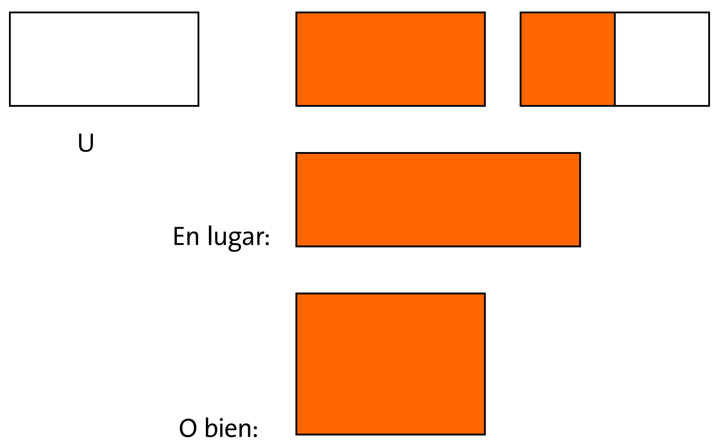
7/12 = 1/4 + 1/4 + 1/12 = 1/3 + 3/12 = 2/3 - 1/12 = 1/2 + 1/3 de 1/4 = ...

En *Cuadernos para el aula, Matemática 4* encontramos una primera propuesta que les permite a los alumnos advertir que lo que determina qué fracción expresa el área señalada es la relación entre la parte y el todo, y no su forma. Pero este tipo de trabajo debe profundizarse necesariamente en quinto grado.

Es frecuente que, ya en sexto grado, muchos alumnos que hayan iniciado su aprendizaje de las fracciones a partir del significado parte-todo y de la “definición” del denominador como el número de partes en las que se divide un entero tengan dificultades para reconocer 1/3 en la figura que se ve en el lateral, dado que se “ven” 4 partes.



Otra dificultad se advierte cuando, por ejemplo, se pide a los alumnos que dibujen una figura de área 3/2, dada una cierta unidad. Esta dificultad es consecuencia de las propuestas centradas en el significado parte-todo, de las representaciones gráficas estereotipadas y de un trabajo sobre áreas ligado solo a la aplicación de fórmulas. Aun manteniendo la forma rectangular, muchos alumnos "necesitan" dibujar los dos enteros para pintar luego los 3/2, sin concebir todavía la fracción como expresión de una medida.



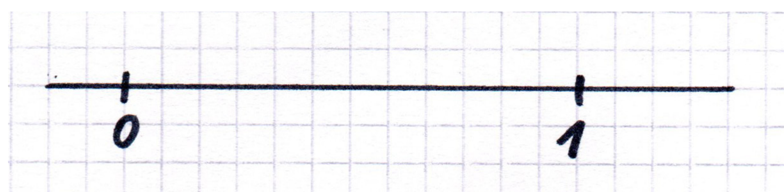
Por esto mismo, resulta central que al abordar el estudio de las figuras en sexto grado se realice un trabajo de medida, en el que se considere la superficie como magnitud, se compare diversas áreas de figuras con distinta forma y se determine su medida a partir de establecer relaciones con una unidad conocida, antes de pasar al cálculo de medidas.

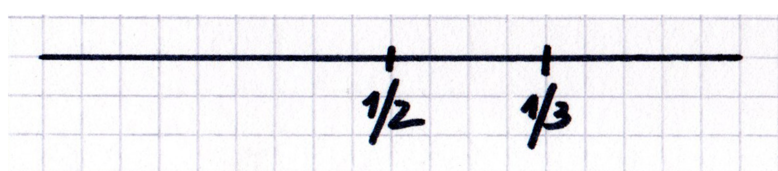
Una forma de abordar este análisis en la capacitación es investigar con qué frecuencia aparecen en las carpetas y libros de texto utilizados en la escuela las representaciones de fracciones como áreas de figuras, asociadas a qué formas y bajo qué consignas. También es interesante advertir si al abordar el estudio de la medida del área y del perímetro de figuras, se utilizan medidas expresadas con fracciones.

Otra representación frecuente cuando se trabaja en el contexto de la medida es la recta numérica. Este soporte es particularmente fértil para revisar la noción misma de fracción avanzando hacia su conceptualización como número, comparar fracciones mayores y menores que la unidad, encuadrar fracciones entre enteros, advertir la equivalencia de distintas expresiones y, eventualmente, apoyar la estimación y el cálculo mental. Sin embargo, su abordaje necesita de un trabajo intramatemático, en el que "representar en la recta numérica" sea un medio para avanzar en la comprensión de este campo numérico, y no un fin en sí mismo o una nueva técnica a aprender. Esto también vale, por supuesto, para las representaciones en el contexto de áreas, y siempre debe incluirse en la clase un momento de reflexión sobre el problema realizado que permita explicitar los conocimientos que se han utilizado o las nuevas relaciones que se han descubierto.

Esto podría llevar a preguntarnos con los maestros en la capacitación: ¿para qué se representa en la recta numérica? ¿Qué saberes se ponen en juego al hacerlo? ¿A qué conclusiones esperamos que arriben los alumnos?

Es necesario tener en cuenta que, según los datos de los que se disponga, el desafío puede ser muy distinto. Por ejemplo, consideremos el caso de representar 2/3 y 5/4 en las siguientes rectas numéricas.





Antes de continuar

Le sugerimos que ubique los números pedidos en las rectas, aunque sea de manera aproximada, para advertir la variedad de conocimientos que se ponen en juego en cada caso

Al analizar estos ejemplos, observamos claramente cómo se manifiesta la noción de variable didáctica desarrollada por Brousseau en el marco de la Teoría de Situaciones, que caracterizan Bartolomé y Fregona cuando afirman:

> "[...] las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado. Algunas de estas condiciones pueden variar a voluntad del docente y constituyen una variable didáctica cuando, según los valores que toman, modifican las estrategias de resolución y, en consecuencia, el conocimiento necesario para resolver la situación".
>
> Bartolomé y Fregona, 2003: 156.

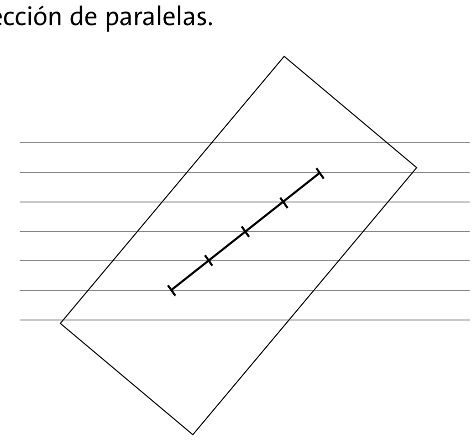
En el caso a, es posible ubicar las fracciones partiendo el entero en 3 partes iguales, y luego en 4, sin relacionar estos números. En b, algunos alumnos podrían optar por recurrir a fracciones equivalentes para elegir una unidad "conveniente", utilizando una medida múltiplo de 3 y 4, o elegir una unidad arbitraria para luego dividirla en tercios y cuartos, utilizando distintos procedimientos. En c, es necesario buscar expresiones fraccionarias equivalentes o usar la resta para encontrar la distancia entre los números y reconstruir el entero.

Será importante revisar en la capacitación con qué criterios se eligen los datos que se presentan a los alumnos en quinto y sexto grados, y qué procedimientos van a usar para dividir los segmentos en partes. A la vez, habrá que tener en cuenta los límites del uso de la regla, atendiendo a los errores propios de cualquier medición, y el grado de precisión requerida en función del propósito de la actividad. Es decir, ¿qué es lo que se quiere discutir a partir de la representación? Por ejemplo, si se tratara de determinar el orden entre dos o tres fracciones, bastaría con una ubicación aproximada, claro está, dependiendo de los denominadores.

Antes de continuar

Aunque el procedimiento derivado del teorema de Thales para dividir segmentos en partes congruentes no es objeto de enseñanza en la escuela primaria, es interesante conocerlo. Si no lo recuerda, puede consultar: "División de un segmento en n partes iguales", preparado por el Instituto de Tecnología Educativa del Ministerio de Educación de España (disponible en http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/0inicio/divsegmento.htm)

Basándose en este procedimiento, muchos estudiantes utilizan el recurso de superponer un segmento que se quiere dividir sobre una hoja rayada, cuyos renglones funcionan como colección de paralelas.



Cabe señalar que, en cualquiera de los casos analizados, la necesidad de registrar el razonamiento que se sigue para resolver un problema lleva a escribir, descomponer, graficar una fracción. Los mismos alumnos deberían avanzar progresivamente en la elección del registro más adecuado para resolverlo, según el procedimiento adoptado. Luego, se necesitará un trabajo intramatemático de análisis de esas escrituras y dibujos, que permita explicitar sus características, su potencia para expresar lo que se desea y también sus límites.

Por ejemplo, descomponer 3/4 como 3 x 1/4 o 1/2 + 1/4 ayuda para el cálculo mental, mientras que es conveniente buscar equivalentes cuando hay que establecer comparaciones con otra fracción de distinto denominador. Por otro lado, las representaciones gráficas donde el entero es una figura convexa son útiles y claras para mostrar fracciones menores que la unidad, pero puede llevar a confusiones en el caso de fracciones mayores, si no se explicita cuál es el entero. En la recta numérica, en cambio, se pueden representar a la vez fracciones mayores y menores que la unidad sin problemas. La forma de la parte a veces permite componer perceptivamente el entero, como en el caso de los círculos, y otras no, etc.

Con respecto a la escritura decimal y su articulación con las fracciones

Si bien en este módulo no nos hemos detenido en el trabajo con decimales, podemos señalar, brevemente, algunos aspectos presentes en las recomendaciones de los Cuadernos para el aula que convendrá tener en cuenta, desde la perspectiva de la articulación en el ciclo.

En principio, y a pesar de que el sistema monetario constituye un soporte interesante para iniciar el trabajo en cuarto grado, es importante tener en cuenta que este contexto no es suficiente para abordar las características de los números racionales.

En dicho sistema, la escritura de un precio expresado en pesos admite solo dos lugares después de la coma, y ese precio se puede expresar en centavos sin escribir la coma. Si realizamos actividades únicamente vinculadas con dinero, no será posible, por ejemplo, advertir que la noción de siguiente, propia de los números naturales, no puede extenderse a los racionales, ya que si bien entre $2,99 y $3 no hay otro precio posible, esto no ocurre entre dos expresiones decimales cualesquiera.

Dado que el significado que el alumno da a un número se enriquece progresivamente, en tanto va aumentando la cantidad de situaciones en las que ese número tiene sentido para él, el 0,1 puede surgir en el contexto de la medida para materializar la décima parte del metro. Tendrá que usarse también para representar el resultado de repartir 1 entre 10, para aproximar el valor de una medida dividiendo una unidad cualquiera en 10 partes iguales, para escribir números menores que 1 al extender el sistema de numeración, etc. Es importante que el alumno comprenda que el objeto matemático (el número 0,1) es el mismo en todas las situaciones.

Para continuar con el tratamiento de las expresiones decimales, más allá de los décimos y centésimos, será necesario incluir situaciones que involucren mediciones o cálculos de medidas que habiliten la introducción de nuevas particiones de la unidad, cada vez más pequeñas.

El avance en la comprensión de la noción de número racional implica, por un lado, usar expresiones decimales y fracciones para representar resultados de mediciones o repartos al resolver problemas. Por otro lado, implica también establecer relaciones de orden entre números y precisar cuáles son los criterios que permiten determinar este orden al comparar distintos tipos de escrituras. Implica, además, reconocer que ambos tipos de escritura son formas diferentes de representar los mismos números.

Tengamos en cuenta que los modos de representación son instrumentos para comprender la información, comunicarla y trabajar con ella y, en este sentido, la utilización de diferentes modos de representación de las ideas matemáticas y la capacidad de transformar una en otra permiten que los niños aprendan a elegir formas alternativas para comunicar sus ideas y a decidir acerca de la validez de las representaciones utilizadas por sus compañeros.

Para comprender la relación entre los dos sistemas de representación, fraccionaria y decimal, es conveniente presentar actividades en las que la información aparezca en ambos formatos y se requiera comparar u operar con esas cantidades.

Las herramientas que permiten trabajar con estos números

Es central que nos detengamos en la secuenciación propuesta en los NAP de segundo ciclo para las “herramientas” que permiten establecer las relaciones entre fracciones, calcular sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de distintas formas y acercarse a la propiedad de densidad.

Sobre las relaciones entre fracciones, ya para cuarto grado se plantea en los NAP: “Multiplicar cantidades expresadas con fracciones y decimales por un número natural para calcular dobles, triples, etc.”. Esto lleva a considerar también mitades, tercios, etc. En efecto, si 1/2 se obtiene como el doble de 1/4, entonces 1/4 es la mitad de 1/2. Se trata, entonces, de obtener una nueva fracción partiendo nuevamente alguna o reuniendo varias iguales. Tal procedimiento permite relacionarlas entre sí, pensando esa relación como una multiplicación o división por un número natural.

No se trata de enseñar un algoritmo. Ya hemos señalado que en las situaciones de reparto se pueden elegir los números para que alguna de las partes obtenidas tenga que partirse nuevamente. De esta manera, al dividir 10 alfajores entre 6 chicos resulta que, luego de dar un alfajor a cada chico, quedan 4 que pueden partirse en mitades, y luego con 8 mitades se reparte una a cada chico y quedan dos mitades. Si se parte nuevamente cada mitad para dar un pedazo a tres chicos, resulta que es necesario hacer la tercera parte de la mitad. Por lo tanto, la relación entre 1/2 y 1/6 es que "1/6 es la tercera parte de 1/2", y también que "1/2 es el triple de 1/6".

Si se tratara de una situación de medida, podría plantearse dibujar un rectángulo de manera que, al medir sus lados con un segmento unidad, resulte que un lado mida 1/6u y el otro mida "el triple de 1/6u". Al indicar las medidas de los lados con la unidad elegida, se verá que la medida del segundo lado es 1/2u.

En ambas situaciones, para encontrar "la tercera parte de" o "el triple de", se exige pensar qué es una fracción y producir alguna justificación para el resultado propuesto.

En quinto y sexto grados se puede cambiar el contexto de los problemas por uno intramatemático, y también se pueden elegir las fracciones a relacionar, de modo que se pida establecer dos relaciones sucesivas y luego componerlas. Por ejemplo, se podría proponer que los alumnos averiguaran "la mitad de la mitad de la tercera parte" y luego advirtieran su equivalencia con "la doceava parte".

Al reflexionar sobre las diferentes escrituras posibles para estas relaciones, es importante llamar la atención de los alumnos acerca de que "calcular la mitad es lo mismo que dividir por 2", "calcular el triple es lo mismo que multiplicar por 3", etc. Será interesante explicitar esta cuestión en la capacitación.

1/2 de ... = ... : 2   1/3 de ... = ... : 3

En cuanto a las formas de calcular con fracciones, se propone –al igual que con los números naturales– fomentar la producción de estrategias personales, antes de instalar los algoritmos convencionales. En el ámbito de la capacitación, será importante señalar las siguientes cuestiones:

- Este trabajo apunta a que los alumnos sean capaces de abordar los problemas con los recursos disponibles –posición de dominio intelectual–, y es fértil en cuanto a la diversidad de relaciones que se ponen en juego. Encarar este tipo de tarea insume mucho más tiempo que si se fuera directamente a los algoritmos convencionales, pero su justificación se basa en la enorme producción de relaciones obtenidas.
- La opción de mostrar un algoritmo y proponer que los alumnos lo repitan puede ser exitosa en el corto plazo, pero desemboca en un aprendizaje diferente del que proponemos. No es verdad que se aprende lo mismo en una u otra opción. Se sostiene la idea de que los aprendizajes rutinarios, por ser poco desafiantes, vacían de sentido la práctica matemática, generan dependencia y desresponsabilizan a los alumnos. Nosotros sostenemos un modo de trabajo matemático en la escuela que se opone a la idea que circula usualmente, según la cual "bajando" la expectativa se aumenta el éxito de los alumnos.

- Una cuestión esencial en relación con todas las operaciones es que los alumnos puedan tener un control del resultado, es decir, que puedan tener una idea aproximada acerca del resultado de la operación que van a efectuar o que ya han efectuado. Para poder realizar este control, es necesario dominar las comparaciones entre fracciones –las relaciones de equivalencia y de mayor/menor– y poder encuadrarlas entre los número enteros consecutivos más próximos. Por ejemplo, si deben sumar 5/4 + 2/5 y entienden que 5/4 es un número entre 1 y 2, y que 2/5 es un número entre 0 y 1, sabrán en una primera aproximación que el resultado no podrá ser un número menor que 1 ni mayor que 3.

Para sumar y restar fracciones, como hemos visto, no planteamos dos momentos, según sean de igual o de diferente denominador. Según esta propuesta de enseñanza, como la idea es aprender desde el inicio diferentes escrituras posibles para una misma cantidad –incluyendo los casos de fracciones equivalentes–, los signos de suma y resta entre fracciones surgen desde las primeras situaciones de reparto que se resuelven. Si los niños le han atribuido significado a las partes, 1/2 + 3/4 será pensado como 2/4 + 3/4, y el resultado podrá ser 5/4 o 1 + 1/4, "porque con 4/4 se forma 1 entero".

En cuarto grado, algunos juegos, como "Escoba del 1" (*Juegos en Matemática EGB2*, p. 9), también dan lugar a plantear otras sumas y restas. Por ejemplo:

Mirá lo que sacaron los chicos en dos jugadas y fijate lo que le falta a cada uno para formar 1.

GABY: 1/2 + 1/3 + ...	ALE: 1/4 + 1/6 + ...
JIME: 1/8 + 1/12 + ...	NACHO: 1/2 + 1/8 + ...

En este caso, apoyados en los canjes realizados durante el juego, la transformación en "partes del mismo tamaño" –es decir, la búsqueda de fracciones equivalentes– resulta una tarea posible para los chicos.

En quinto y sexto grados, se podrá avanzar en el dominio del uso de equivalencias para justificar las descomposiciones realizadas en actividades de cálculo mental.

Una forma de fomentar su realización es proponer juegos en los que intervengan estos cálculos. Luego es importante analizar lo realizado para obtener conclusiones y sistematizarlas.

En cuanto a la multiplicación y la división, en quinto grado se plantea el inicio de la multiplicación de una fracción o un número decimal por un número natural para que en sexto grado sea posible avanzar en el contexto de la proporcionalidad y del cálculo de áreas o volúmenes, sin llegar necesariamente a la formulación de reglas.

Con respecto a la propiedad de densidad de los números racionales, si bien desde cuarto grado es posible advertir que "entre dos fracciones hay otras fracciones", recién en sexto o séptimo grado se puede reflexionar de manera explícita acerca de las diferencias entre los números naturales, por un lado, y las fracciones y los decimales, por otro. Tanto en la actividad ya mencionada, "Si cambian los números, ¿valen las mismas propiedades?", (en *Leer, escribir y argumentar*), como en "Plantear situaciones para analizar relaciones y propiedades de los números" (en *Cuaderno para el aula, Matemática 6*), es posible encontrar ejemplos de problemas que podrían abordarse en la capacitación para discutir con los maestros qué alcance darle a la reflexión acerca de esta cuestión.

Estos problemas también permiten retomar el tema de las representaciones, ya que, por ejemplo, la escritura decimal ofrece rápidamente muchos ejemplos de números que se encuentran entre otros dos, mientras que en el caso de las escrituras fraccionarias –y según la relación entre los denominadores– encontrar esos números resulta más complejo. Esto, a su vez, puede dar lugar al análisis de la noción de variable didáctica.

De este modo, y tal como planteábamos en nuestros puntos de partida, la "teoría didáctica" aparece en la capacitación a través del uso de algunos de sus resultados para considerar posibles cursos de acción o para analizar lo que se ha hecho.

En el mismo sentido, hemos tomado las componentes que Artigue distingue entre las concepciones para fundamentar algunos criterios para la planificación de la enseñanza en el ciclo.

> "[...] la clase de situaciones problema que dan sentido al concepto para el alumno, el conjunto de significantes que él es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas y las herramientas, útiles, teoremas, algoritmos de los cuales dispone para manipular el concepto".
>
> Artigue 1984 en Ruiz Higueras, 1998

También en esta clase hemos señalado cómo la articulación de estas componentes con los distintos modos de funcionamiento y las diferentes tareas que los alumnos pueden desarrollar a propósito de un conocimiento permite planificar secuencias de enseñanza. Estas se pueden organizar en función de un propósito particular, priorizando un significado, unas representaciones y unos procedimientos, y dejando de lado otros, y a la vez incluyendo una variedad de actividades.

Poder explicitar los motivos por los cuales se eligen ciertas actividades y no otras, y el orden en el que estas se presentarán a los alumnos, a partir de una reflexión sobre la propia práctica, supone una revisión sobre los modos de hacer, aprender y enseñar Matemática. Contribuye también al reconocimiento de criterios profesionales que muchas veces funcionan de manera implícita en la acción.

Además de promover el avance en el desarrollo de competencias profesionales y de favorecer una mejor comprensión del enfoque que sustenta los actuales marcos curriculares, este tipo de explicitación favorece asimismo una mejor evaluación de las propuestas de enseñanza. Cuando se pasa de "enseñar un tema" a través de una colección de actividades a planificar secuencias de enseñanza orientadas por un propósito explícito, sobre un recorte también explícito del contenido, es posible tener un mejor control de los "efectos" de esas propuestas en la clase y diseñar luego nuevas actividades más ajustadas al logro de los aprendizajes previstos para los alumnos.

Actividad final de resolución obligatoria

Considere la siguiente propuesta para abordar el análisis de la enseñanza de la suma de fracciones y anticipe cómo podría ser utilizada en una situación de capacitación. Realice a continuación las siguientes consignas.

a. Explicite qué elementos de las concepciones podrían abordarse, o cuáles elegiría priorizar:
- significados, repertorio, tipos de tareas, modos de funcionamiento de los conocimientos;
- representaciones;
- propiedades, relaciones y formas de calcular.

b. ¿Considera que su análisis podría dar lugar a la explicitación de la noción de variable didáctica? ¿Por qué?

c. Transcriba dos actividades para los alumnos, una para cuarto grado y otra para quinto, que podría utilizar con los maestros durante la capacitación, para discutir acerca de la progresión de la enseñanza de la suma de fracciones en el ciclo.

Actividad final de resolución obligatoria

En sexto grado de la escuela primaria se suele enseñar la suma y resta de fracciones aplicando la siguiente regla:

$$1/3 + 2/4 = \frac{1 \text{ X } 4 + 2 \text{ X } 3}{3 \text{ X } 4 \qquad 12}$$

La memorización de la regla sin llegar a comprenderla y sin saber por qué es necesario sumar y restar fracciones contribuye a que los alumnos se formen la idea de que la Matemática sirve solamente para aprobar en la escuela, pero no para la vida en general.

1.
a. Explique esta regla justificando cada uno de los pasos.
b. Explique por qué cuando se suman fracciones del mismo denominador solo se suman los numeradores.

2. Escriba un problema en contexto extramatemático que se resuelva con 1/3 + 2/4 y que permita discutir si tendría sentido sumar los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.
a. Explicite con qué significado se usan las fracciones en el problema.
b. Si en el marco de la resolución de ese problema los alumnos usaran fracciones equivalentes, ¿en qué idea podrían estar apoyándose para hacerlo?
c. En el enunciado del problema, ¿es posible cambiar fracciones 1/3 y 2/4 por 1/2 y 3/4 manteniendo el sentido? Si esto es así, ¿qué otros procedimientos podrían usar los alumnos para resolverlo? Si no, ¿cómo modificarían el enunciado del problema?

Suponga que usted es el capacitador del “Caso de capacitación en la escuela para docentes de segundo ciclo solicitada por el director”, que analizamos al iniciar este módulo. Anticipe y registre tres acuerdos en relación con la enseñanza de las fracciones a los que podrían llegar los maestros de esa escuela en el último encuentro de capacitación.

Referencias bibliográficas

Andonegui Zabala, M. (2006), "Obstác\

Bartolomé, O. y D. Fregona (2003), "El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales", en Panizza, M. (comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el Primer Ciclo de la EGB: análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós.

Ministerio de Educación (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007), *Cuadernos para el aula, Matemática 4, 5 y 6*. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. Disponible en http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2007), *Matemática: leer, escribir y argumentar*. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. Disponible en http://portal.educacion.gov.ar/primaria/recursos-didacticos-y-publicaciones/

Ruiz Higueras, L. (1998) *La noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén.