Clase virtual Nº 7

Transformaciones de las prácticas de enseñanza: el caso de las fracciones

Autores: Graciela Chemello, Mónica Agrasar, Silvia Chara y Analía Grippa - Equipo Áreas curriculares del MInisterio de Educación

Introducción

En el Módulo 2 planteábamos que las concepciones de cada docente acerca de la matemática y del sentido de su presencia en la escuela obligatoria condicionan lo que cree posible y deseable enseñar. Estas ideas acerca de "lo que hay que enseñar" y de cómo hacerlo se van construyendo a partir de un sinnúmero de experiencias vividas en la propia trayectoria educativa, incluidas las previas a la formación inicial y las derivadas de los primeros desempeños profesionales. En estas experiencias se funden, superponen y dialogan perspectivas epistemológicas distintas, a causa de la diversidad de tiempos e instituciones en las que se desarrollaron.

En ese sentido, interesa preguntarnos cuáles han sido los mensajes –más o menos explícitos– que han recibido los maestros acerca de la enseñanza de la matemática en distintos momentos de su formación y qué impacto han tenido en la configuración de concepciones asociadas a distintas prácticas de enseñanza que hoy conviven en nuestras escuelas.

En particular, en esta clase, revisaremos algunos materiales escritos relacionados con la enseñanza de las fracciones en el Segundo Ciclo de la escuela primaria con el propósito de analizar cómo se ha ido transformando.

En la capacitación, es frecuente que los docentes planteen que los alumnos encuentran obstáculos para trabajar con fracciones y que es un tema difícil de aprender. Muchas veces afirman que en cada año del Segundo Ciclo "hay que volver a empezar" y que, aun haciéndolo (si es que esto fuera posible), no se obtienen buenos resultados de aprendizaje.

¿Es este tema efectivamente "más difícil" de enseñar que otros? Si es así, ¿por qué? Y si no, ¿por qué esta percepción?

Al respecto, coincidimos con Escolano Vizcarra y Gairín Sallán cuando afirman que

> "[...] es cierto que buena parte de las dificultades de comprensión de los escolares se sitúan en el conjunto de conceptos, procedimientos, relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y así se pone de manifiesto en distintas investigaciones (Kerslake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren, 1993). Pero también es cierto que existen dificultades de comprensión provocadas por el proceso instructivo".
>
> Escolano Vizcarra y Gairín Sallán, 2005: 17.

En el siguiente apartado nos concentraremos en hacer notar la variedad de presentaciones y tratamientos dados a las fracciones en distintas propuestas, lo que nos dará más elementos para dialogar con las prácticas de los docentes en los espacios de capacitación y buscar de manera conjunta alternativas de intervención que contribuyan a mejorar los aprendizajes de los niños. Para ello también será necesario conocer los diferentes significados que se han configurado a lo largo de la historia para esta noción, cuestión que abordaremos en la Clase 8.

Cabe aquí señalar que el conocimiento de los números racionales requiere de un proceso largo, que trasciende la escuela primaria, y que muchos adultos, incluidos los maestros, no han tenido la oportunidad de profundizar durante sus estudios. Este conocimiento muchas veces se limita a los procedimientos de cálculo con representaciones fraccionarias y decimales, sin advertir la complejidad de relaciones que es necesario articular para comprender la verdadera naturaleza de estos números. En este sentido, resulta clave advertir en la capacitación que la enseñanza de los números naturales y sus operaciones resulta un desafío mucho más accesible para el maestro.

Antes de continuar

- Registre sus primeras apreciaciones acerca de la importancia que usted le atribuye al trabajo con las fracciones y con las expresiones decimales en la escuela primaria.
- Registre qué le respondería a un maestro si, en una situación de capacitación, este le preguntara: ¿Qué es un número racional? ¿Qué diferencia tiene con una fracción? ¿Y con un número decimal?

Referirnos a la enseñanza de los números racionales lleva necesariamente a una primera distinción entre la interpretación del número racional como un cociente –cuestión que en los NAP se plantea a partir del primer año de la escuela secundaria–, del tratamiento que se da a las expresiones fraccionarias y decimales en la escuela primaria.

En relación con las fracciones, muchos niños –y buena parte de la humanidad durante muchos siglos, tal como veremos en la Clase 8– no consideran que una fracción sea "un" número, sino una expresión formada por dos números (naturales) que indica, dado un entero dividido en una cierta cantidad de partes, cuántas de estas partes se han tomado. Aun manteniendo esta concepción, muchos alumnos pueden apropiarse de algunas reglas de comparación y cálculo y lograr cierto nivel de éxito en su uso.

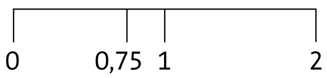
En el caso de los decimales, los niños no tienen dificultades para considerarlos números. Con ellos expresan los resultados de distintas mediciones y pueden operar sin mucha dificultad agregando algunas reglas a las ya conocidas para el trabajo con números naturales. Sin embargo, pueden no haber advertido que no se trata de "números (naturales) con coma".

Aunque en séptimo grado se espera que los alumnos "argumenten sobre la equivalencia de diferentes representaciones de un número, usando expresiones fraccionarias y decimales finitas, descomposiciones polinómicas y/o puntos en la recta numérica" (NAP), muchas veces el tratamiento escolar de las expresiones fraccionarias y decimales se mantiene desarticulado, hasta el momento en el que se aprenden las reglas para "pasar" de fracción a decimal y viceversa. Habitualmente, no son los alumnos los que toman la decisión de utilizar un tipo u otro de expresión en función del problema a resolver. Por otra parte, el significado que pueden atribuir a estas expresiones queda circunscripto a los contextos de uso explorados; o, simplemente, el significado no se tiene en cuenta, al naturalizar un trabajo mecánico de reproducción de técnicas.

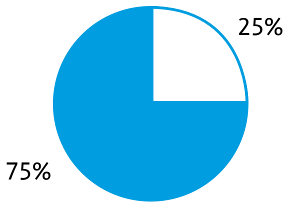
Acceder al concepto de número racional requiere conocer los significados, los contextos de uso asociados a las distintas representaciones y los procedimientos de comparación y cálculo propios de cada tipo de representación, avanzando en la articulación de estos componentes. Tengamos en cuenta que el cociente entre dos números enteros, con divisor distinto de cero, define un número racional; que hay cocientes equivalentes que definen un mismo número racional, y que todo número entero es racional, pues puede expresarse como cociente de enteros.

A su vez, además de las representaciones numéricas suelen emplearse gráficos asociados a distintas situaciones de uso, lo que aumenta la complejidad de las representaciones a articular.

3/4 6/8 75/100 0,75 75%



3/4



Por otra parte, los niños intentan conservar y extender los conocimientos adquiridos en relación con los números naturales, lo que se suma al desafío. Por ejemplo, no les es fácil advertir que 0,0867 no es mayor que 1,2, aunque tiene más cifras. O bien que 4/5 no es el siguiente de 3/5. Esta situación se complica aún más cuando se trata de comparar 1,5 y 1/5.

Si bien en este apartado nos centramos en las representaciones, conocer los números implica no solo conocer los modos de referirse a ellos en forma escrita u oral, es decir, sus representaciones (con símbolos numéricos, en la recta numérica), sino también sus propiedades, las relaciones que pueden establecerse entre ellos (de orden, aditivas o multiplicativas), cómo intervienen en los cálculos, cómo se usan en las operaciones que resuelven problemas y, más adelante, el tipo de estructura que forman.

Antes de continuar

Si no ha tenido contacto frecuente con alumnos de la escuela primaria, puede realizar alguna indagación para identificar qué utilidad o importancia otorgan los niños a las fracciones y a los decimales, así como a las reglas que permiten operar con ellos. Por ejemplo, podría preguntar:

¿Qué aprendiste en la escuela sobre fracciones y decimales? ¿Te resultó fácil o difícil? ¿Para qué pensás que sirven las fracciones? ¿Y los decimales? ¿Te parece que es importante saber calcular con ellos? ¿Por qué?

Acerca de la enseñanza de las expresiones decimales

En relación con las expresiones decimales, su extendido uso social y su gran valor instrumental hace que muchas veces se enseñe en continuidad con lo que se sabe del sistema de numeración decimal para los números naturales, sin demasiado nivel de problematización. De este modo, y cuando se focaliza la enseñanza en la adquisición de algoritmos con fracciones y decimales, la preocupación planteada por los maestros en la capacitación está en las fracciones y no en los decimales. Sin embargo, y aunque no lo profundizaremos en esta clase, el desafío de esta enseñanza no es trivial ni debe descuidarse.

Históricamente, los cálculos y las medidas se simplificaron considerablemente con la aparición de los decimales, pues esta forma de escritura permite utilizar los algoritmos de cálculo definidos para los naturales. Hoy, esos cálculos se realizan cómodamente con calculadora y el fácil acceso a esta herramienta hace que el valor "instrumental" de este conocimiento deba ponerse en cuestión, al menos como eje de trabajo en el Segundo Ciclo.

En este sentido se señala en los NAP que se trata de "disponer y controlar una variedad de estrategias para operar seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados[1] que resulte más conveniente en función de la situación y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido". También se espera que los alumnos puedan analizar afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que diferencian los números naturales de las fracciones y las expresiones decimales, cuestión que pocas veces se tiene en cuenta.

Es más, el trabajo en contextos "cotidianos" a veces oculta las características del campo numérico. Por ejemplo, es frecuente que muchas actividades se presenten apoyadas en el uso del dinero, pero, en este contexto, no es posible advertir que la noción de *siguiente*, propia de los números naturales, no puede extenderse a los racionales: entre $2,99 y $3 no hay otro precio posible, pero entre 2,99 y 3 hay infinitos números racionales.

El tratamiento de las expresiones decimales, más allá de los décimos y centésimos, requiere la inclusión de situaciones que involucren mediciones o cálculos de medidas que habiliten la introducción de nuevas particiones de la unidad, cada vez más pequeñas, y de una reflexión acerca del sentido mismo de las cifras decimales. Muchas veces, y justamente por la extensión de los procedimientos de cálculo, se trabaja "sin la coma" para luego determinar qué posición ocupa, sin analizar qué es lo que se está representando. Esto tampoco contribuye a evaluar la pertinencia del resultado que se obtiene.

[1] Seleccionar la forma de expresar los números involucra decidir si se va a operar con fracciones o con expresiones decimales y, en este último caso, evaluar la cantidad de cifras decimales que se necesitan para expresar el resultado en función de la situación.

En el tratamiento de la medida y las mediciones suele advertirse una excesiva preocupación por la determinación de equivalencias entre expresiones de una misma cantidad usando distintas unidades, sin problematizar la elección de las unidades en función del ejercicio que se está resolviendo, ni profundizar el análisis de los sistemas de unidades atendiendo a su vinculación con el sistema de numeración y a las relaciones de proporcionalidad presentes.

Un manejo a veces exitoso de estas representaciones en el nivel de la aplicación de reglas oculta muchas veces el desconocimiento de los fundamentos de estas reglas y del sentido de estos números, así como de la posibilidad de diferenciarlos de los números naturales.

Es por ello que, aun cuando no aparezca como demanda de los docentes, resulta necesario problematizar en la capacitación algunas prácticas que se han naturalizado.

Recomendación de lectura

Para abordar estos temas en la capacitación podrían analizarse algunos de los problemas que se plantean en los apartados "¿Es el mismo número o es distinto?" y "Si cambian los números, ¿valen las mismas propiedades?" de *Leer, escribir y argumentar* de la Serie de los *Cuadernos para el Aula*.

Leer, escribir y argumentar, Ministerio de Educación, 2008.

Acerca de la enseñanza de las fracciones

El caso de las fracciones resulta particularmente complejo.

Por una parte, las fracciones tienen un uso social muy acotado a un repertorio elemental, lo que limita las posibilidades de vincular su aprendizaje con la resolución de problemas planteados en contextos extramatemáticos. Las situaciones que requieren el uso de números racionales y son familiares para los alumnos se refieren en general a medidas y se resuelven usando escrituras decimales. Desde este punto de vista, surge el desafío de preguntarnos cuáles podrían ser problemas verosímiles para los alumnos que permitieran utilizar las fracciones como herramientas para su resolución. Esto nos llevará necesariamente a discutir con sumo cuidado en la capacitación el alcance del trabajo en contextos intra y extramatemáticos.

Por otra parte, el trabajo con fracciones tiene una importante presencia en el curriculum, impacta fuertemente en las expectativas de aprendizaje para la acreditación de los alumnos y responde, muchas veces, a una secuencia de enseñanza sumamente instalada y orientada hacia el dominio de los algoritmos. En nuestra tradición escolar, esta enseñanza frecuentemente se orienta al dominio de reglas cuya fundamentación se desconoce, no solo por los estudiantes sino también, muchas veces, por los propios maestros.

Tal como señala Llinares para el caso español, en una investigación cuyos resultados parecen vigentes en nuestro contexto después de más de 10 años:

> "[...] el significado asociado a los símbolos matemáticos por los estudiantes para profesores procede en muchas ocasiones del propio nivel de formalización matemática y está vinculado parcialmente al aspecto simbólico y al manejo sintáctico[2]".
>
> Llinares, 1998: 18.

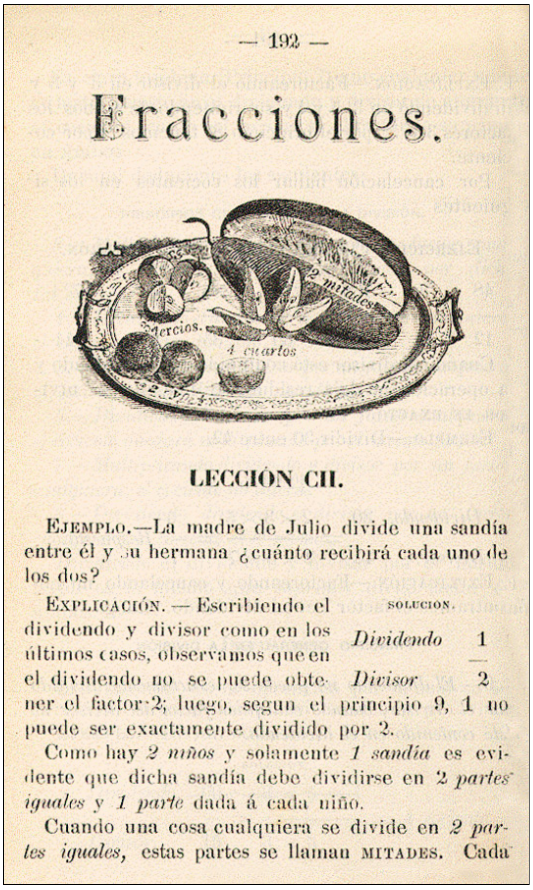
Al igual que con las representaciones, este manejo "exitoso" de reglas oculta muchas veces serias dificultades de comprensión, que notamos recién en los niveles secundario o superior, cuando el profesor de matemática espera una construcción más acabada de la noción de número racional y un manejo flexible de distintas representaciones para trabajar con ellos.

Es entonces que nos preguntamos: ¿qué tipo de prácticas de enseñanza han dado lugar a estos resultados de aprendizaje? ¿Qué aspectos es necesario tener en cuenta para mejorarlos?

Las primeras huellas

Buscando los antecedentes de nuestras actuales prácticas de enseñanza, encontramos en un texto de 1880 la idea de fracción presentada mediante la división en partes iguales de un objeto.

[2] Con "lo sintáctico" Llinares se refiere a los modos de combinar y transformar las expresiones simbólicas usuales en la disciplina.



— 192 —

Fracciones.

LECCIÓN CII.

EJEMPLO.—La madre de Julio divide una sandía entre él y su hermana ¿cuánto recibirá cada uno de los dos?

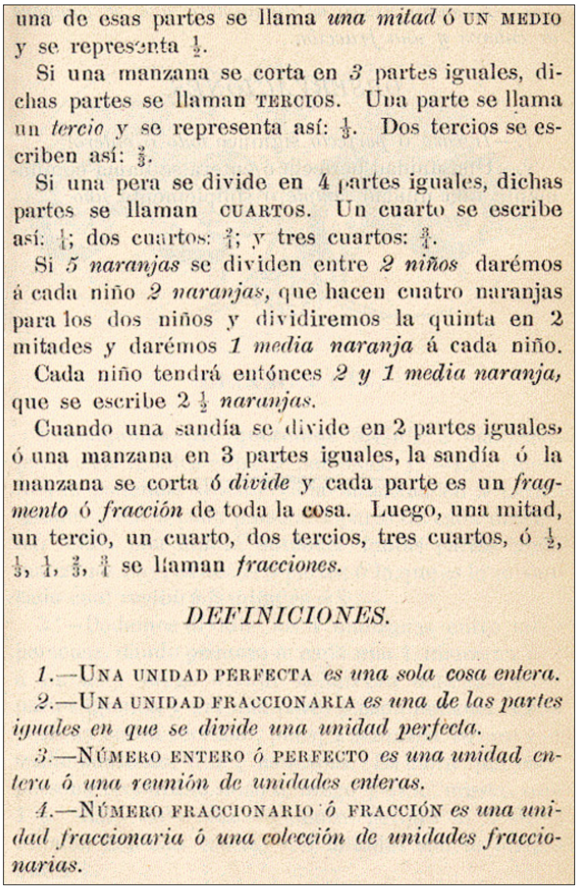
EXPLICACIÓN. — Escribiendo el dividendo y divisor como en los últimos casos, observamos que en el dividendo no se puede obtener el factor 2; luego, segun el principio 9, 1 no puede ser exactamente dividido por 2.

SOLUCION.

Dividendo	1
Divisor	2

Como hay *2 niños* y solamente *1 sandía* es evidente que dicha sandía debe dividirse en *2 partes iguales* y *1 parte* dada á cada niño.

Cuando una cosa cualquiera se divide en *2 partes iguales*, estas partes se llaman MITADES. Cada



una de esas partes se llama *una mitad* ó UN MEDIO y se representa $\frac{1}{2}$.

Si una manzana se corta en *3* partes iguales, dichas partes se llaman TERCIOS. Una parte se llama un *tercio* y se representa así: $\frac{1}{3}$. Dos tercios se escriben así: $\frac{2}{3}$.

Si una pera se divide en 4 partes iguales, dichas partes se llaman CUARTOS. Un cuarto se escribe así: $\frac{1}{4}$; dos cuartos: $\frac{2}{4}$; y tres cuartos: $\frac{3}{4}$.

Si *5 naranjas* se dividen entre *2 niños* darémos á cada niño *2 naranjas*, que hacen cuatro naranjas para los dos niños y dividiremos la quinta en 2 mitades y darémos *1 media naranja* á cada niño.

Cada niño tendrá entónces *2 y 1 media naranja*, que se escribe $2\frac{1}{2}$ *naranjas*.

Cuando una sandía se divide en 2 partes iguales, ó una manzana en 3 partes iguales, la sandía ó la manzana se corta ó *divide* y cada parte es un *fragmento* ó *fracción* de toda la cosa. Luego, una mitad, un tercio, un cuarto, dos tercios, tres cuartos, ó $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ se llaman *fracciones*.

DEFINICIONES.

1.—UNA UNIDAD PERFECTA *es una sola cosa entera.*

2.—UNA UNIDAD FRACCIONARIA *es una de las partes iguales en que se divide una unidad perfecta.*

3.—NÚMERO ENTERO Ó PERFECTO *es una unidad entera ó una reunión de unidades enteras.*

4.—NÚMERO FRACCIONARIO Ó FRACCIÓN *es una unidad fraccionaria ó una colección de unidades fraccionarias.*

Marcos Sastre, *Lecciones de Arismética para las escuelas primarias de niños y niñas* (Imprenta de Pablo Coni, Buenos Aires, 1880, pp. 192-193).

Esta presentación retoma la idea de "quebrado" presente en muchos libros españoles que desarrollaban contenidos de enseñanza de aritmética para niños en el siglo XIX.

Como veremos en la clase siguiente, el significado de la fracción como relación parte-todo es el que se puede identificar en los primeros registros históricos de egipcios y babilonios. Sin embargo, en los documentos de estas culturas, las particiones del entero no son arbitrarias, sino que están ligadas a la necesidad de cuantificar el resultado de una medición o de un reparto.

Tal como afirma Martín Andonegui Zabala (2006), se observa un "proceso de elementarización del concepto de fracción que se va a presentar en el nivel básico de la enseñanza", de reducción de un contenido matemático a formas más elementales que se consideran accesibles para los alumnos, que luego se aplican o refieren a supuestas situaciones del mundo real. Sin embargo, este "mundo real" es más bien un "mundo escolar" donde objetos reales se parten sin otro propósito que el de estudiar las fracciones.

Esta presentación de las fracciones como partes se reitera en distintos libros de texto y genera un tratamiento escolar que se aleja de las situaciones reales que les dan sentido, construyendo un repertorio de "problemas escolares" que cristalizan este recorte. Luego, en distintos textos de didáctica de mediados del siglo XX encontramos propuestas en ese sentido.

"No obstante se comienza a dar en los grados inferiores la idea de parte, los números fraccionarios se estudian en detalle en el curso medio y superior. Acerca de su valor educativo y práctico, hay opiniones contrarias. Su empleo era más provechoso con el sistema de pesas y medidas antiguas, que hoy se ha sustituido por el sistema métrico decimal, el cual se vale de los decimales en lugar de utilizar los quebrados.

Sus defensores consideran que en la vida diaria se presentan numerosas oportunidades, donde su utilidad es indiscutible. Además, le atribuyen un gran valor educativo. En nuestros programas se incluyen.

Para dar el concepto de fracción hay procedimientos rigurosamente intuitivos, como ser la división de un objeto en partes iguales entre sí, la representación gráfica de parte y luego, la representación numérica.

La dificultad se presenta en las operaciones, que generalmente se aprenden de manera mecánica, puesto que el razonamiento de los niños no alcanza a percibir la función del denominador como divisor, o la reducción a un común denominador, etc.

Sin embargo, como medio de ejercitación de operaciones y cálculos, o para la adquisición de destrezas, son recomendables.

La transformación de las fracciones comunes o *quebrados* a números decimales es el camino más racional para hacer comprender el valor de estos últimos. Sobre este punto se insistirá mucho en los grados medios y superiores, porque los decimales tienen gran aplicación en la vida práctica. De ahí que el conocimiento de las cuatro operaciones con números decimales sea indispensable. Además estos números se aplican en las reducciones del sistema métrico".

Imperatore, 1941: 346-347.

Antes de continuar

Relea sus apreciaciones acerca de la importancia que hay que darle al trabajo con las fracciones y las expresiones decimales en la escuela primaria.

- ¿Sus notas son coincidentes con las afirmaciones de Amanda Imperatore?
- ¿Qué importancia damos hoy a la adquisición de "destrezas"?
- ¿Es necesariamente la posibilidad de aplicación en la vida práctica lo que define la inclusión de un contenido en el currículum?

Registre sus comentarios a estas preguntas y, si es posible, genere un intercambio de opiniones al respecto con su grupo de trabajo.

En el texto siguiente encontramos una propuesta donde se marca la necesidad de "objetivación del número", al utilizar representaciones gráficas cuyo objetivo es que el alumno "vea" la imagen adecuada:

"La enseñanza de las fracciones exige el empleo de una metodología que permita:

a) la presentación de la situación en forma sensible,

b) la aplicación en ejercicios,

c) la utilización en soluciones prácticas.

El éxito del aprendizaje radica en provocar experiencias fáciles de ser aprehendidas a través de mensajes puramente intuitivos. [...]

PROCEDIMIENTOS DIDÁCTICOS

El concepto de fracción debe ser brindado en forma intuitiva.

El maestro evitará el aprendizaje mecánico de las operaciones aunque el niño 'no alcance a percibir la función del denominador como divisor o la reducción a común denominador'.

Con objeto de facilitar dichas percepciones, se brindan los siguientes procedimientos didácticos:

a) *Para enseñar la función del denominador como divisor*

Sea por ejemplo, la enseñanza de la noción '*cuartos*':

1° Se presenta un objeto concreto.

2° Se lo corta, divide, parte, *fracciona* en cuatro partes.

3° Se señala la acción con una raya (esta significa 'fracción' porque 'el objeto fue fraccionado').

4° Las partes iguales en que está fraccionado el objeto se anotan *debajo* de la raya.

5° Las partes que se toman se señalan en la parte superior de la raya.

6° En posesión del símbolo fraccionario, el maestro *hace* realizar objetivaciones gráficas a fin de que el alumno compare, asocie, asimile, reflexione, diagrame, piense, deduzca.

7° Aparecen los símbolos 1/4, 2/4, 3/4, y 4/4.

8° Se realizan ejercicios en conjunto y experimentaciones personales.

9° Se sugieren actividades:

- colorear 1/4 de un círculo;
- colorear 3/4 de un rombo;
- calcular 1/4 de los alumnos presentes;
- calcular 3/4 de los libros de lectura.

10° Se verifica el aprendizaje con el auxilio de tarjetas seriadas".

Combetta, 1969: 206.

Aquí se mantiene la idea de quebrado, se presenta "un" objeto concreto, se lo corta, divide, parte, fracciona en partes y se interpreta el símbolo en función de esas acciones. Cabría preguntarse cómo transfieren los alumnos esta interpretación para "calcular 1/4 de los alumnos presentes o calcular 3/4 de los libros de lectura", pues en estos casos los que se fracciona en partes es una colección de objetos, y las "partes" son iguales en cuanto al número de objetos que las componen, pero podrían tener características distintas.

Esta misma perspectiva es la que se evidencia en el *Manual de Ingreso en Primer año* de Berruti (1957). Aunque se desliza una mención de la idea de cociente (la línea de división indica 2 dividido por 5), esta no resulta coherente con el resto de las "definiciones".

FRACCIONES ORDINARIAS

Fracciones ordinarias. — Son las que expresan una sola o varias de las partes iguales en que se puede dividir la ***unidad.*** **Ej.:**

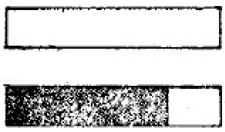
$\frac{2}{5}$ (dos quintos) indica **dos** de las **cinco partes en que se dividió la unidad.**

$\frac{2}{5}$
→ **numerador:** **indica las partes tomadas: 2.**
→ **línea de división:** indica 2 dividido por **5.**
→ **denominador:** **indica las partes en que se dividió la unidad.**

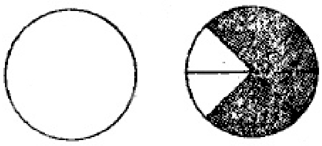
También se puelen escribir así las fracciones:

2/5; 1/8; 4/11; 23/30; ½; ¾; $^4/_{15}$; etc.

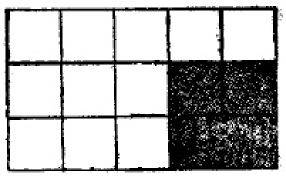
Representación e interpretación gráfica de fracciones.— Dibuje:



Representación de 3/4.



Representación de 6/8.



Representación de **4/15.**

Pedro Berrutti, *Manual de Ingreso en Primer año* (Buenos Aires, Escolar, 1957, p. 27).

Más allá de algunas diferencias, la organización de la enseñanza se hace a partir de una presentación centrada en la división de una unidad en partes iguales, con apoyo de acciones concretas y representaciones gráficas que dan cuenta del criterio de progresión de lo concreto a lo abstracto propio de la época, que se cristaliza en la clásica progresión de contenidos para el tema:

- Presentación de las fracciones como partes de *una* unidad, representaciones gráficas y escritura identificando los términos: numerador (partes que se toman), denominador (partes en las que se divide la unidad), raya de fracción.
- Clasificación de fracciones en propias, impropias y aparentes. Escritura de números mixtos.
- Comparación, suma y resta de fracciones del mismo denominador.
- Fracciones equivalentes. Ampliación y simplificación.
- Comparación de fracciones.
- Se "suspende" el desarrollo del tema para avanzar con descomposición en factores, mínimo común múltiplo, máximo común divisor.

- Reducción de fracciones al mínimo común denominador.
- Suma y resta de fracciones de distinto denominador.
- Multiplicación y división.

Luego, se avanza con fracciones decimales y expresiones decimales.

Podríamos preguntarnos qué sentido podrían construir los niños para los números racionales a partir de estas actividades o de qué modo podrían relacionar estas propuestas de enseñanza con los usos "reales"[3] de las fracciones.

Es interesante notar que en los textos de la época aparecen fracciones como expresión de una medida, por ejemplo 3/4 kg, pero el tratamiento de la medida y los sistemas de medición se presenta como un eje aparte vinculado fundamentalmente a las expresiones decimales. Estas expresiones surgen también asociadas al dividir la unidad (metro, kilo, litro) en partes y luego sumarlas. No hay referencias, por ejemplo, a equivalencias del tipo: *si 4 paquetes pesan 3 kilos, cada uno pesa 3/4 de kilo*.

En relación con la división, si bien se habla de partir o dividir "el" entero, no se abordan situaciones en las que haya que realizar una división exacta en la que el dividendo no sea múltiplo del divisor. La fracción 3/4 se interpreta como el resultado de tomar 3 de las 4 partes en las que fue dividido un entero y no se relaciona con el resultado de dividir 3 entre 4.

En otros casos, se enuncia que la fracción indica un cociente, pero no se plantean situaciones que permitan dar sentido a esa expresión y el trabajo se mantiene en el terreno de la aplicación de reglas.

[3] La expresión "reales" no se refiere exclusivamente a lo cotidiano, sino a las situaciones en las que tiene sentido usar estas expresiones, más allá del propósito de "ser enseñadas". Por ejemplo, expresar el resultado de una división exacta en la que el dividendo no es múltiplo del divisor.

FRACCIONES ORDINARIAS

Clasificación y propiedades

Cuando el dividendo no es divisible por el divisor, el cociente puede expresarse como fracción ordinaria.

EJEMPLOS: 5 dividido por 8 es $5 : 8$ o bien $^5/_8$

14 dividido por 9 es $14 : 9$ o bien $^{14}/_9$

Toda fracción indica el cociente de dos números.

Clases de fracciones

Fracciones puras $\begin{cases} \text{propias: } ^2/_3,\ ^4/_5, \text{ etc. (El numerador es menor que el denominador.)} \\ \text{impropias: } ^8/_5,\ ^9/_4, \text{ etc. (El numerador es mayor que el denominador.)} \end{cases}$

Fracciones impuras o aparentes $\left\{ \dfrac{6}{6}, \dfrac{12}{3}, \right.$ etc. (El numerador es múltiplo del denominador.)

Números mixtos $\left\{ 2\,^1/_5,\ 3\,^2/_7, \right.$ etc. (Está formado por una parte entera y una **fracción propia**.)

Reducción de una fracción impropia a número mixto y viceversa

EJEMPLO 1) Reducir la fracción impropia $\dfrac{36}{7}$ a número mixto.

Toda fracción indica el cociente del numerador por el denominador.

Efectúa la división.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 7 \text{ divisor} \\ \hline 1 & 5 \text{ cociente} \end{array}$$

resto

Escribe un número mixto con parte entera 5 y fracción propia $\dfrac{1}{7}$.

$5\,^1/_7$

O sea:

$$\boxed{\dfrac{36}{7} = 5\,^1/_7}$$

Para reducir una fracción impropia a número mixto divide el numerador por el denominador. El cociente es la parte entera; el resto, el numerador de la fracción propia, y el divisor, su denominador.

EJEMPLO 2) Reducir el número mixto $4\,^2/_5$ a fracción impropia.

El número mixto es igual a la suma de la parte entera y la fracción propia.

$$4\,^2/_5 = 4 + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$$

Prácticamente:

Multiplica la parte entera por el denominador y suma el numerador: $4 \times 5 + 2 = 22$

Escribe como numerador de la fracción impropia 22 y como denominador 5. O sea:

$$\boxed{4\,^2/_5 = \frac{22}{5}}$$

*Nuevo Manual Estrada VI grado (*Buenos Aires, Estrada, 1964, p. 404).

El tratamiento de la proporcionalidad se reduce a la presentación de "métodos" de resolución en los que no se explicitan relaciones multiplicativas entre cantidades de un mismo o distinto tipo, expresadas mediante fracciones.

Tomemos como ejemplo el *Manual de Ingreso en Primer año*, de Berrutti:

I. REGLA DE TRES SIMPLE

1º **SIMPLE, Directa** PROBLEMA TIPO.— Si 12 secantes **importan** 72 $ ¿cuál es el precio de 20?

Solución por reducción a la unidad

Planteo

Si 12 s. ——— 72 $
20 s. ——— x $

Solución

12 s. ——— 72 $
1 s. ——— $\frac{72}{12}$
20 s. ——— $\frac{72 \times 20}{12} = 120$ $

Resp. El precio de 20 secantes es de 120 $.

Solución por proporciones

Planteo

12 s. ——— 72 $
20 s. ——— x $

Cómo se forma la proporción directa: de arriba abajo:

12 72
20 x

$12 : 20 :: 72 : x$

$x = \frac{20 \times 72}{12} = 120$ $

Pedro Berrutti, *Manual de Ingreso en Primer año* (Buenos Aires, Escolar, 1957, p. 71).

En este caso, si bien la constante es un número natural, no se establece que hay que multiplicar a 72 por el mismo número que se multiplica a 12 para obtener 20.

$$72 \times \frac{20}{12} = 72 \times \frac{20}{12} = 72 \times \frac{5}{3}$$

x 5/3 12 s. ------------ 72 $
20 s. ------------ x x 5/3

Esto requeriría interpretar que 20/12 o 5/3 es el número por el que hay que multiplicar a 12 para obtener 20, lo que supone una conceptualización muy distinta a la de la relación parte-todo.

Tampoco se advierten vinculaciones explícitas de las fracciones con razones, aunque se asume una interpretación de la fracción como cociente que no ha sido abordada. Por ejemplo:

12

PROPORCIONALIDAD

RAZONES Y PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Razón.— Razón geométrica de dos números es el cociente que resulta de dividir el primero (*antecedente*) por el segundo (***consecuente***).

Entre 10 y 5 la razón es $\frac{10}{5} = 2$. Entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$ es $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = \frac{8}{5}$.

Proporción.— Proporción geométrica es la igualdad de dos razones:

Siendo, por ejemplo $\frac{12}{4} = 3$ y $\frac{21}{7} = 3$ la proporción es $\frac{12}{4} = \frac{21}{7}$. También se puede escribir así: 12 : 4 :: 21 : 7.

En ambos casos se lee: "*12 es a 4 como 21 es a 7*".

Cada número se llama término; 12 y 7 son los **extremos**; 4 y 21 los **medios**.

Si ambos medios son iguales, la proporción se llama *continua*: 20 : 10 :: 10 : 5.

Propiedad fundamental de las proporciones.— El producto de los *extremos* es igual al producto de los *medios*:

En la prop. 12 : 4 :: 21 : 7 resulta $12 \times 7 = 4 \times 21$ (= 84).

En la prop. $\frac{0,8}{0,2} = \frac{1,2}{0,3}$ resulta $0,8 \times 0,3 = 0,2 \times 1,2$ (= 0,24).

Pedro Berrutti, *Manual de Ingreso en Primer año* (Buenos Aires, Escolar, 1957, p. 69).

En este ejemplo, se habla del cociente que se obtiene al dividir el antecedente por el consecuente y, tal como se señaló antes en el mismo texto, la línea horizontal se asume como una división indicada (12/4 = 3 y 12 : 4 = 3); sin embargo no se mencionan las fracciones, excepto por una actividad que dice: "Escriba 2 proporciones cualesquiera usando números enteros y fraccionarios", en la página siguiente.

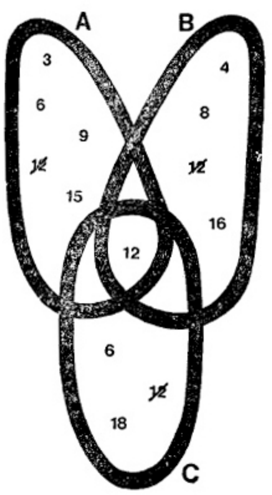
Actividad

Será interesante, en relación con su participación en futuras acciones de capacitación, contar con libros de texto o cuadernos de clase de distintas épocas para ser utilizados como material de análisis en encuentros con maestros.

¿Tiene algún texto o cuaderno que haya usado en su escuela primaria? ¿Qué libros usaron los maestros que hoy día trabajan en las escuelas de su zona?

Los aportes de la modernidad

Después de los años setenta, este esquema general se mantiene, pero se agrega el uso de operaciones entre conjuntos para hallar los denominadores comunes.



La adición y la sustracción de fracciones

En general se acostumbra a reducir las fracciones a un denominador común, lo que plantea el problema de su búsqueda.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

Para hallar el número común denominador, bastará que el niño aplique sus conocimientos sobre multiplicación y divisibilidad. Por simple inspección puede obtener, a veces, el menor múltiplo común a los tres denominadores. Es posible también que acuda a la intersección de Conjuntos, procedimiento que el escolar ya conoce.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{múltiplos de } 3\} \qquad & A &= \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\} \\ B &= \{\text{múltiplos de } 4\} \qquad & B &= \{4, 8, 12, 16, \ldots\} \\ C &= \{\text{múltiplos de } 6\} \qquad & C &= \{6, 12, 18, 24, \ldots\} \end{aligned}$$

$$A \cap B \cap C = \{12 \ldots\}$$

$$\text{m.c.m.} = (3; 4; 6) = 12$$

Rosa Ziperovich, *Enseñanza moderna de Matemática* (Rosario, Biblioteca, 1969, p. 127).

En este texto sí aparecen vinculaciones explícitas con la medida y la proporcionalidad, y las fracciones aparecen vinculadas con razones.

"En la razón se toma una de las cantidades que se comparan como unidad de la otra. Esto significa también buscar las veces que la unidad está contenida en el todo, o lo que es igual, a dividir por la unidad elegida. En otros términos, esto quiere decir, también, medir. Veamos: si decimos 1 pato representa 5 patos, esto significa que el gráfico expresará 1/5 del total. Si obedecemos a la misma razón 1 : 5 y queremos representar 10 patos, habrá que ver cuántas veces la unidad que nos sirve de referencia está contenida en 10. Ya tenemos dos razones equivalentes.

1 pato : 5 patos = 2 patos : 10 patos

De un modo general 1 : 5 = 2 : 10 = 3 : 15 = 4 : 20 = 5 : 25, etc., nos permite deducir: a) todas son fracciones equivalentes; b) las representaciones que se hagan tomando como punto de referencia cada fracción serán siempre la quinta parte del todo, es decir, obedecerán a la razón 1/5."

Ziperovich, 1969: 172-173.

Sin embargo, la multiplicidad de relaciones que se establecen resulta sumamente compleja para ser construida por los niños a partir de la "comparación de objetos y de la coordinación con los símbolos", que es lo que plantea la autora. Es más, no se advierte cómo harían los niños para descubrir estos vínculos.

En los ochenta, a partir de los aportes derivados de los avances en la psicología del desarrollo y de la matemática moderna, observamos otros cambios. En particular resulta significativa la consideración de la idea de operador difundida por Dienes.

La preocupación de los "modernos" por definir con claridad los objetos matemáticos hace que la definición conjuntista de fracción aparezca en los textos destinados a docentes, junto con la representación en la recta numérica que le da status de número, cuestión que no se había planteado antes, al menos no de forma explícita.

Veamos algunos ejemplos:

Ficha 6 Concepto de número racional. Operaciones en Q. Conjunto de decimales.

1.- El lector conoce expresiones numéricas como $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{1}{9}$. Esos números pueden considerarse como pares ordenados (3 ; 4), (8 ; 2), (1 ; 9) en los cuales el primer elemento del par es el numerador, y el segundo el denominador. Sería, esta última, otra manera de escribirlos, pero que no altera, en absoluto, el concepto de número racional ya visto en primaria y secundaria.

En general: $\frac{a}{b}$ puede escribirse (a ; b), siendo **a** un elemento cualquiera de Z y **b** un elemento cualquiera de Z, **excepto 0.**

$\frac{5}{8}$ representa el mismo número que (5 ;...)

$\frac{-7}{3}$ representa el mismo número que (... ; 3)

$\frac{\dots}{\dots}$ representa el mismo número que (11 ; 17^-)

$\frac{9}{9}$ representa el mismo número que (... ;...)

$\frac{-4}{\dots}$ representa el mismo número que (... ; 13^-)

$\frac{12}{48^-}$ representa el mismo número que (... ;...)

2.- En una clase de 24 alumnos, están presentes hoy las $\frac{2}{3}$ partes.

¿Cuántos alumnos son? ¿Cómo se procede para resolver este problema? Efectivamente, a 24 se lo multiplica por 2 y luego se divide el resultado por 3, o bien se lo divide por 3 y al cociente se lo multiplica por 2. Las $\frac{2}{3}$ partes de 24 es 16.

Este ejemplo nos permite enfocar a las fracciones como combinación de dos operaciones: producto (en el numerador) y división (en el denominador).

$24 \rightarrow \times 2 \rightarrow : 3 \rightarrow 16$

$24 \rightarrow : 3 \rightarrow \times 2 \rightarrow 16$

o, resumiendo:

$24 \rightarrow \times \frac{2}{3} \rightarrow 16$

a) ¿Cuánto es $\frac{4}{5}$ de 100? Expresarlo mediante combinación de operaciones:

$100 \rightarrow \times \frac{4}{5} \rightarrow ?$

$100 \rightarrow \times \dots \rightarrow : \dots \rightarrow ?$

b) ¿Qué parte fraccionaria de 32 es 20?
$32 \rightarrow ? \rightarrow 20$
¿Hay una sola fracción que, aplicada a 32, dé por resultado 20?

3.- Veremos ahora una relación de equivalencia que el lector seguramente habrá encontrado desde la escuela primaria y que tal vez no ha analizado de esta manera.

Consideremos una bolsa con 20 bolitas; sacar los $\frac{2}{5}$ o los $\frac{4}{10}$ es lo mismo, en ambos casos se sacarán 8 bolitas. Se dice que las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son "equivalentes". No son iguales, teniendo en cuenta que una fracción es un par ordenado de enteros...

Analicemos en el conjunto de las fracciones la relación F: "es equivalente a". ¿Es una relación de equivalencia? ¿Por qué?

4.- La clase de equivalencia de la fracción $\frac{2}{5}$ es el conjunto:

$$\left\{ \frac{2}{5}; \frac{4}{10}; \frac{14}{35}; \frac{8}{20}; \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Esta clase se indica:

$$\left[\frac{2}{5}\right]$$

que es un "*número racional*" o simplemente "*un racional*".

¿Cómo se escribe la clase de la fracción $\frac{4}{10}$? ¿Qué elementos tiene? ¿Se puede escribir $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$? ¿Por qué?

¿Es verdadero $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$?

En la práctica esta igualdad se escribe abusivamente, pues las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ no son iguales sino equivalentes.

El racional $\frac{2}{5}$ sí es igual al racional $\frac{4}{10}$.

¿Cuál es la diferencia entre fracción y racional?

5.- Elegir una fracción, por ejemplo $\frac{7}{2}$, multiplicar por 3 su numerador y su denominador. La fracción ¿ha cambiado? El racional correspondiente ¿ha cambiado?

Contestar las mismas preguntas cambiando 3 por un natural **no nulo** cualquiera.

6.- Definiremos ahora en forma general la relación F del apartado 3: sean dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ (a y c son enteros, b y d dos enteros no nulos), por lo visto en el apartado 5:

$$\frac{a}{b} \; F \; \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} \; F \; \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$$

¿En qué condiciones $\frac{a\,.\,d}{b\,.\,d}$ y $\frac{b\,.\,c}{b\,.\,d}$ son equivalentes?

De allí se deduce que:

$$\frac{a}{b} \; F \; \frac{c}{d} \text{ sí y solamente si } a\,.\,d = b\,.\,c$$

7.- En esta ficha hemos presentado los números racionales de tres maneras distintas: como par ordenado, como combinación de operadores y como clase de equivalencia. Por razones de comodidad y uso habitual seguiremos hablando de números racionales, pero sin olvidarnos de la amplitud que el concepto tiene.

Se llama "Q" el conjunto de los racionales, que incluye a Z y por lo tanto a N:

$$Q = \{ (a, b) \,/\, a \in Z \text{ y } b \in (Z \setminus \{0\}) \}$$

Luz Cerdeyra y Gema Fioriti, *Enseñanza de la Matemática* (Buenos Aires, AZ, 1987, pp. 167-168).

En libros de texto para alumnos de sexto grado encontramos las marcas de esta preocupación por la definición dentro de las aulas. De todos modos, aunque los alumnos puedan repetir enunciados vinculados a la idea de par ordenado o de clase de equivalencia –que exceden en mucho sus posibilidades de comprensión–, el significado atribuido a las fracciones queda, desde la imagen, vinculado fuertemente a la idea parte-todo.

Todas las fracciones equivalentes entre sí se representan en la recta numérica por el mismo punto. Esto significa que todo el conjunto de fracciones equivalentes corresponde a un mismo número, al que se llama *número racional*. El número racional, que corresponde al conjunto de fracciones equivalentes, se expresa por la fracción irreducible del conjunto.

Clasificar conjuntos de fracciones y de expresiones decimales, aplicando la relación R = "es equivalente a"

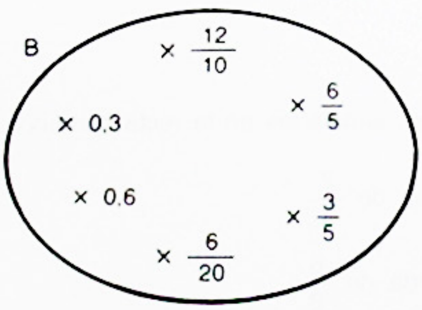
Sea $B = \left\{0{,}3;\ \frac{12}{10};\ \frac{6}{5};\ 0{,}6;\ \frac{6}{20};\ \frac{3}{5}\right\}$

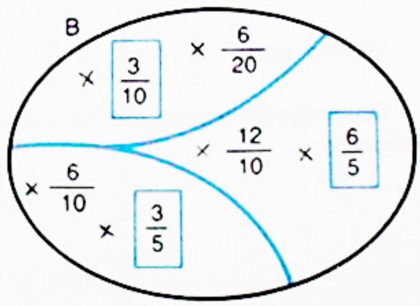
Escribimos todos los elementos de B en forma fraccionaria:

$$B = \left\{\frac{3}{10};\ \frac{12}{10};\ \frac{6}{5};\ \frac{6}{10};\ \frac{6}{20};\ \frac{3}{5}\right\}$$

Señalamos las fracciones equivalentes: $\frac{3}{10} = \frac{6}{20};\ \frac{12}{10} = \frac{6}{5};\ \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Aplicando la relación "es equivalente a" clasificamos el conjunto B en tres clases de equivalencia: $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{5}$ y $\frac{3}{5}$.





- Aplica la relación "es equivalente a" en los siguientes conjuntos:

$$C = \left\{2;\ 3;\ \frac{8}{4};\ \frac{27}{9};\ \frac{3}{9};\ \frac{12}{4};\ \frac{2}{5}\right\}$$

$$D = \left\{0{,}1;\ 0{,}5;\ 1{,}5;\ \frac{1}{2};\ \frac{6}{4}\right\}$$

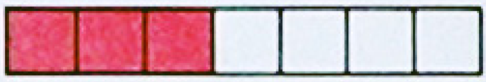
Manual Estrada para sexto grado (Buenos Aires, Estrada, 1985).

Números fraccionarios

Toda fracción es un par ordenado de números naturales con la segunda componente distinta de cero.

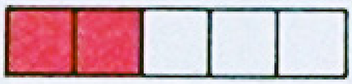
El primer elemento del par ordenado es el numerador.
El segundo elemento del par ordenado es el denominador.

$(3 ; 7) = \frac{3}{7}$



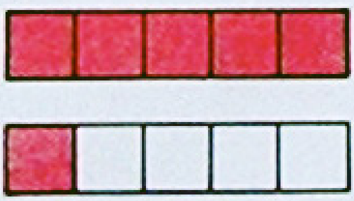
Entero dividido en 7 partes iguales
3 partes coloreadas

$(2 ; 5) = \frac{2}{5}$



Entero dividido en 5 partes iguales
2 partes coloreadas

$(6 ; 5) = \frac{6}{5}$



Entero dividido en 5 partes iguales
6 partes coloreadas

Manual Kapelusz para sexto grado (Buenos Aires, Kapelusz, 1985).

En estos años, a la vez que se devela la complejidad del objeto "número racional", que trasciende en mucho la idea de quebrado, distintos investigadores toman como problema de estudio la enseñanza de las fracciones y ponen el acento en la variedad de significados que es posible atribuir al uso de estas expresiones.

Al respecto, Valdemoros Alvarez dice:

> "Algunos investigadores (entre otros, Kieren, 1976, 1980, 1983, 1984, 1985, 1988, 1992, 1993; Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Behr y Post, 1988; Ohlsson, 1988) han promovido un gran avance, a nivel de los estudios semánticos centrados en las fracciones. Con ello, han sentado las bases para delimitar ciertos significados factibles de construcción, reconociendo simultáneamente determinados espacios de aplicación en los que ellos emergen (lo cual conlleva implicaciones didácticas directas o indirectas)".
>
> Valdemoros Álvarez, 2004: 237.

Si bien esta variedad de significados será caracterizada en la próxima clase, señalamos algunos aportes que permiten comenzar a advertir la complejidad que esto supone para la enseñanza.

Block (2007) comenta:

> "Vergnaud (1988), por ejemplo, habla de fracciones y de razones como dos nociones del campo conceptual de las estructuras multiplicativas destinadas a sintetizarse en el concepto de número racional: [...] Freudenthal (1983) destacó también la importancia del estudio de la noción de razón en las matemáticas elementales y, si bien no centró su atención en la vinculación con el concepto de número racional, dejó ver la existencia de dicho vínculo".
>
> Block, 2007: 496.

Block también señala los aportes de Brousseau al plantear el papel –eventualmente implícito– que puede jugar la proporcionalidad en el proceso de estudio de los números racionales. ¿Cómo impactaron los resultados de estas investigaciones en las propuestas de enseñanza?

Las propuestas en los últimos veinte años

En nuestro país, en los desarrollos conceptuales y orientaciones para la enseñanza que se elaboraron en el marco de la aprobación de los Contenidos Básicos Comunes en 1994 se plantea la necesidad de revisar la cuestión del sentido:

> "Una amplia variedad de temas de muy distinta índole se relacionan con la noción de fracción, pero, en general, no son relacionados por nosotros al planificar nuestras clases.
>
> No solemos relacionarlo o no explicitamos las relaciones que existen con proporcionalidad, razones, probabilidad, porcentaje, etc. La mayor parte de las veces solo se concibe la fracción como expresión de una parte en relación con un todo continuo unitario (chocolate, torta, etc.) o discreto (fracción de un número: 275 de 2000 alumnos). Para superar estas dificultades se propone en la "Síntesis explicativa" del Bloque 1: 'El trabajo con fracciones y decimales en el Primer Ciclo estará vinculado con los usos sociales de los mismos, en situaciones simples de medición, uso de dinero o lectura de precios, relacionándose este contenido con los del bloque de mediciones. En el Segundo Ciclo también se pretende un trabajo con racionales cuyo cometido sea comprender su significado matemático, dándole sentido a través de situaciones que impliquen su uso en la vida diaria y que, por lo tanto, no incorporarán expresiones complejas de las mismas (CBC)'".
>
> Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, 1997.

En los mismos materiales también se señala la necesidad de atender a las representaciones gráficas que se utilicen y la importancia de abordar con los alumnos la comparación entre los números naturales y los números racionales para advertir relaciones y diferenciar propiedades.

En la propuesta de los NAP, encontramos avances en relación con esta perspectiva.

EN RELACIÓN CON EL NÚMERO Y LAS OPERACIONES

4º

Matemática / 4º año

El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales de uso social habitual, en situaciones problemáticas que requieran:

- interpretar, registrar o comparar el resultado de una medición, de un reparto o una partición a través de distintas escrituras con fracciones[2]
- interpretar, registrar o comparar cantidades utilizando expresiones con una o dos cifras decimales
- interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales de uso frecuente para una misma cantidad
- comparar, entre sí y con números naturales, fracciones y expresiones con una o dos cifras decimales de uso frecuente a través de distintos procedimientos.

5º

Matemática / 5º año

El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales, en situaciones problemáticas que requieran:

- interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades (precios, longitudes, pesos, capacidades, áreas) usando fracciones y/o expresiones decimales usuales ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones
- interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales[10] para una misma cantidad
- comparar fracciones y/o expresiones decimales entre sí y con números naturales a través de distintos procedimientos (relaciones numéricas, expresiones equivalentes, representaciones gráficas) ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.

El reconocimiento y uso de las operaciones entre fracciones y expresiones decimales en situaciones problemáticas que requieran:

- sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades expresadas con fracciones o decimales utilizando distintos procedimientos y representaciones y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido
- elaborar y comparar distintos procedimientos (multiplicar, dividir, sumar o restar cantidades correspondientes) para calcular valores que se corresponden proporcionalmente, evaluando la pertinencia del procedimiento en relación con los datos disponibles
- elaborar y comparar procedimientos[13] de cálculo – exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora - de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre fracciones y entre expresiones decimales, incluyendo el encuadramiento de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados
- explicitar procedimientos de cálculo mental que puedan utilizarse para facilitar otros cálculos (la mitad de la mitad es la cuarta parte, 0,25 x 3 = 0,75 = 3/4,...) y para argumentar sobre la validez de los resultados obtenidos.

NAP: Matemática - Segundo Ciclo.

Sin embargo nos preguntamos, ¿en qué medida se ha modificado la selección de usos y representaciones de los números racionales que se incluyen para ser enseñadas en el Segundo Ciclo de la escuela primaria? ¿Conoce el maestro las relaciones entre estos números y la división, la medida y la proporcionalidad?

Tengamos en cuenta que, muchas veces, el trabajo que se realiza en la escuela secundaria con las fracciones y las expresiones decimales no recupera las cuestiones conceptuales sino que se limita a su uso en el cálculo. De este modo, el sentido que un adulto ha construido acerca de la naturaleza de los números racionales se mantiene generalmente asociado a las experiencias vividas en la escuela primaria, según el repertorio escolar propio de cada período.

En el caso de los maestros de escuela primaria, y aunque se observan matices según la época en que se han formado, la noción de fracción se mantiene muy ligada a la relación parte-todo, a menos que esta cuestión haya sido objeto de estudio en la formación inicial.

Indagar el estado de situación nos permite, como capacitadores, precisar los focos de trabajo y, a la vez, anticipar el alcance y los posibles obstáculos de nuestras intervenciones. Al respecto, David Block y Diana Solares (2001) plantean que introducir las fracciones como cocientes antes de introducirlas como quebrados representaría un cambio demasiado radical en la enseñanza primaria actual. Por otro lado, sostienen que este cambio difícilmente podría ser conducido de manera adecuada, ya que rompería con la práctica muy arraigada de introducir las fracciones como quebrados, y porque las situaciones didácticas que se han diseñado y puesto a prueba en contextos de investigación son relativamente complejas para su gestión en las aulas.

La posibilidad de identificar las acciones profesionales, encontrar los medios para describirlas, caracterizarlas y evaluar posibles estrategias de acción en la capacitación dependerá, en gran parte, de los vínculos que se puedan establecer entre las propuestas que se presenten para su análisis y la realidad de las prácticas habituales. Dependerá también de los modos de elaboración de esas prácticas y de su evolución, en función de la diversidad de condiciones del trabajo docente.

Actividad obligatoria

1. Para avanzar en la identificación de algunos rasgos propios de las prácticas habituales en las escuelas de su zona, le proponemos que entreviste a un maestro de cuarto, quinto o sexto grado.

a. Pregunte al maestro cómo le explicaría a uno de sus alumnos qué es una fracción y pídale que describa una actividad que utilice habitualmente para que sus alumnos se inicien en la noción de fracción o la profundicen (según el grado). Si es posible contar con el cuaderno o carpeta de un alumno, o con el libro de texto, conserve una fotocopia de la actividad.

b. Transcriba las respuestas y explicite qué relaciones puede establecer con las propuestas de enseñanza de los distintos períodos analizadas en esta clase.

2. Considere el caso y, a partir de lo analizado y de su conocimiento de las prácticas de enseñanza que se desarrollan hoy en las escuelas de su región, anticipe tres preguntas que podrían hacer los maestros en relación con la enseñanza de las fracciones.

3. Relea las apreciaciones que registró al finalizar la Introducción respecto de la enseñanza de las fracciones, así como la respuesta que le daría a un maestro en una situación de capacitación. Elabore una breve reflexión acerca del impacto que ha tenido su propia trayectoria educativa en esas respuestas.

Elabore un documento de Word y envíe su producción o la de su grupo a su tutor antes de la próxima clase.

Referencias bibliográficas

Andonegui Zabala, M. (2006), "Obstáculos epistemológicos, teóricos y prácticos, para la construcción de una didáctica integral de la matemática en la educación preescolar y básica", en *Equisángulo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2 (1). Mérida: SABER ULA. Universidad de los Andes. Disponible en línea: www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/20306/1/articulo7.htm

Berrutti, P. (1957), *Manual de ingreso en Primer Año*. Buenos Aires: Escolar.

Block, D. (2007), "El papel de la noción de razón en la construcción de fracciones en la escuela primaria", en Cantoral, E. R., O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano*. México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos, pp. 455-470.

Block, D. y D. Solares (2001), "Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo", en *Educación Matemática*, 2 (13). México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 5-30.

Castro Rodríguez, E. (2010), *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial*. Granada: Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Disponible en línea: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Elena_Castro.pdf

Cerdeyra L. y G. Fioriti (1987), *Enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires: AZ.

Combetta, O. C., (1969), *Planeamiento curricular*. Buenos Aires: Losada.

Escolano Vizcarra R., y J. Gairín Sallán (2005), "Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria", en *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, N° 1, pp. 17-35.

Escolano, R. (2002), "Enseñanza del número racional positivo: un estudio desde el modelo cociente", en *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Almería: Universidad de Almería, pp. 149-158.

Gairín Sallán, J. M. (2001) "Sistemas de representación de números racionales positivos: un estudio con maestros en formación", en *Contextos educativos: Revista de educación*, N° 4, pp. 137-159.

Godino, J. D., A. M. Recio, F. Ruiz, R. Roa y J. L. Pareja (2003), "Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. Análisis didáctico mediante la Teoría de las Funciones Semióticas", en XVIII Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (Córdoba, SIIDM, Grupo DMDC-SEIEM). Disponible en línea: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/

Imperatore, A. (1941), *Lecciones de Didáctica General y Especial de los ramos instrumentales*. Buenos Aires: Librería del Colegio.

Llinares, S., y V. Sánchez (1998), "Aprender a enseñar, modos de representación y número racional", en Rico, L. y M. Sierra (eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada: SEIEM, pp. 15-26.

Llinares Ciscar, S. (2009), "Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación", en: Uno. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Nº 51, pp. 92-101.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación (1997), *Materiales de Apoyo para la capacitación docente*. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Valdemoros Álvarez, M. (2004), "Lenguaje, fracciones y reparto", en *RELIME*. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 3 (7), pp. 235-256.

Ziperovich, R. (1969), *Enseñanza moderna de Matemática*. Rosario: Biblioteca.