Clase virtual Nº3

Problemas de y para la enseñanza de las operaciones en la clase

Autores: Mónica Agrasar, Analía Crippa, Silvia Chara y Graciela Chemello, equipo del área de Matemática del Ministerio de Educación

Presentación del Módulo 2

Hoy, se cuenta con variada bibliografía acerca de la enseñanza de las operaciones con números naturales que pone el acento en la construcción de sentido de las nociones matemáticas, y se han realizado numerosas acciones de capacitación al respecto. Sin embargo, muchos niños y niñas aún encuentran obstáculos en este aprendizaje, lo que pone en riesgo su trayectoria escolar.

En muchas escuelas se mantiene un trabajo sobre el cálculo que no se articula convenientemente con la construcción de sentido para el uso de las distintas operaciones; se prioriza el uso de algoritmos fijos y en las evaluaciones con las que se decide la promoción de los alumnos se otorga un lugar central al dominio de estos.

¿Por qué esta resistencia al cambio? ¿Qué factores influyen en la modificación o no de las prácticas de enseñanza? ¿Qué tipo de intervenciones en la capacitación podrían generar otro impacto?

En cada una de las clases que conforman este módulo tomaremos un eje de análisis para abordar estas preguntas y reflexionar juntos acerca de posibles cursos de acción. En particular, nos plantearemos qué conocimientos matemáticos necesita un maestro para enseñar y cómo abordar este conocimiento desde una perspectiva de desarrollo profesional. Para esto, consideraremos un caso de capacitación para docentes de varias escuelas diseñado sobre el análisis, adecuación y puesta en práctica de secuencias de actividades para la enseñanza de la multiplicación y la división en tercero y cuarto grados.

En esta primera clase del Módulo 2 (clase 3 del Ciclo), revisaremos la perspectiva que orienta las recomendaciones para la enseñanza de las operaciones en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), explicitando las distintas dimensiones que es necesario atender al seleccionar los problemas para trabajar en las clases de primaria. También analizaremos la variedad de prácticas docentes a las que ha dado lugar la interpretación de estas recomendaciones.

En la segunda clase (clase 4), la mirada estará centrada en la perspectiva curricular, y buscará recuperar el modo como se enseñaban las operaciones en diferentes momentos históricos. Esto nos llevará, a su vez, a observar la distancia entre lo que la escuela enseñaba, y enseña, y lo que necesita un ciudadano autónomo para responder a los distintos requerimientos matemáticos a los que se enfrenta en su vida personal, laboral, de estudio.

Analizar los contenidos y las orientaciones presentes en documentos curriculares y libros para docentes nos permitirá advertir las diferencias en el objeto de enseñanza y reconocer el origen de muchas prácticas que aún se mantienen vigentes.

En la tercera clase (clase 5), advertiremos acerca de la evolución en la historia de los conocimientos sobre los números y las operaciones, lo que nos permitirá comprender los modos en que se usan y evolucionan los conocimientos matemáticos, y el rol de las representaciones en este funcionamiento. Identificaremos luego los conocimientos matemáticos que el docente necesita dominar para enseñarlos. Este análisis también aportará elementos para fundamentar el sentido de una enseñanza que busca centrarse en la actividad matemática y no solo en sus resultados.

Por último, en la cuarta clase (clase 6) recuperaremos lo trabajado desde la perspectiva de la capacitación, y nos centraremos en cómo abordar la resignificación de los conocimientos matemáticos de los maestros.

Como producción final para acreditar este Módulo le solicitaremos mediante consignas de trabajo que vuelva sobre los textos producidos en las actividades obligatorias (que se presentarán oportunamente en cada clase) y planifique algunos componentes del primer encuentro del caso de capacitación en estudio.

Clase 3: Problemas de y para la enseñanza de las operaciones en la clase

Introducción

Tal como afirmamos en la presentación, aquí revisaremos el significado que se le da actualmente a la enseñanza de las operaciones, así como las variadas prácticas a que han dado lugar las recomendaciones curriculares al respecto.

Para ello, organizaremos nuestro recorrido de lectura en dos apartados. En el primero, señalamos algunos aportes de la didáctica de la matemática que orientan las producciones curriculares, y en el segundo desarrollamos las características del enfoque en relación con la enseñanza de las operaciones.

1. Aportes de la didáctica de la matemática para pensar la enseñanza

Desde hace más de tres décadas se han divulgado en nuestro país numerosos aportes para la enseñanza de las operaciones que dieron lugar a variadas experiencias en distintas escuelas.

Hoy podemos afirmar que desde 1994 –año en que se acordaron los Contenidos Básicos Comunes– hasta el acuerdo establecido mediante los NAP, el enfoque en relación con la enseñanza de las operaciones a nivel curricular es concordante. Este enfoque responde a una nueva demanda social en relación con las competencias deseables en los alumnos y ha sido plasmado en diferentes documentos curriculares en cuyo análisis es necesario seguir trabajando en la capacitación.

A la hora de analizar los aprendizajes logrados y lo que ocurre en las aulas hoy, puede verse que los alumnos aún evidencian dificultades para saber qué operaciones utilizar al resolver un problema dado, cómo controlar el resultado obtenido, qué explicaciones permiten justificar los distintos pasos que se realizan en un cálculo. Para modificar estas cuestiones, es necesario que estos saberes formen parte del proyecto del docente, es decir, que sean objetos de enseñanza.

Para avanzar en la reflexión sobre el tratamiento de estos saberes en la capacitación, y en particular para el recorte temático elegido para este Módulo, conviene comenzar haciéndonos algunas preguntas: ¿de qué nos tenemos que hacer cargo cuando enseñamos a multiplicar y dividir? ¿Cuándo podemos afirmar que un alumno sabe multiplicar? ¿Y dividir? O, lo que es equivalente: ¿qué debe saber un alumno cuando domina la multiplicación y la división?

Antes de continuar

Realice sus propias anotaciones en respuesta a las preguntas previas.

La respuesta a estas preguntas depende, en principio, de las competencias que queremos desarrollar, de la concepción de matemática que se quiere transmitir y de la concepción del aprendizaje que tengamos.

Desde hace algunas décadas, especialistas en didáctica de la matemática reconocidos por su trabajo investigaron sobre estos temas, lo que fue generando un campo de conocimientos para pensar esta enseñanza en la escuela. Estos aportes nos han permitido plantear, en el apartado «Enseñar Matemática en el Primer Ciclo» de los *Cuadernos para el aula,* unos puntos de partida generales que retomamos aquí.

Reconsiderar el sentido de la matemática en la escuela

La concepción que cada persona se va formando de la matemática depende del modo en que va conociendo y usando los conocimientos matemáticos. En este proceso, la escuela tiene un rol fundamental, ya que es allí donde se enseña y se aprende de un modo sistemático a usar la matemática. El tipo de trabajo que se realice en la escuela influirá fuertemente en la relación que cada persona construya con esta ciencia, lo que incluye el hecho de sentirse o no capaz de aprenderla.

Cuando la enseñanza de la matemática, en lugar de plantearse como la introducción a la cultura de una disciplina científica, se presenta solo como el dominio de una técnica, la actividad matemática en el aula se limita a reconocer, luego de las correspondientes explicaciones del maestro, qué definición usar, qué regla hay que aplicar o qué operación «hay que hacer» en cada tipo de problema. Se aprende qué hacer, pero no para qué hacerlo, ni en qué circunstancia hacer cada cosa.

La enseñanza que apunta solo al dominio de una técnica ha derivado en dificultades que ya conocemos: por una parte, aunque permite que algunos alumnos logren cierto nivel de «éxito», cuando el aprendizaje se evalúa en términos de respuestas correctas para problemas tipo, deja afuera a muchos alumnos que no se sienten capaces de aprender matemática de este modo. Por otra, lo así aprendido se demuestra claramente insuficiente en el momento en que se trata de usar los conocimientos para resolver situaciones diferentes de aquellas en las que se aprendieron. Es el caso, por ejemplo, de los alumnos que calculan sin dificultad una división por varias cifras pero que no pueden, frente al enunciado de un problema, optar por multiplicar o dividir para resolverlo y preguntan «de qué» el problema.

Otras veces, la actividad en el aula incluye la resolución de problemas diversos, y se pasa de uno a otro y a otro sin un trabajo reflexivo que vuelva sobre lo realizado. Trabajar solo resolviendo problemas, sin explicar o fundamentarlos «matemáticamente» también es insuficiente. Quienes trabajan de este modo, sin duda, no aprenden lo mismo que quienes, tras resolver esos mismos problemas, deben luego explicitar los procedimientos realizados y analizar las diferentes producciones o, a partir de los cuestionamientos de otros compañeros, argumentar sobre su propio punto de vista o dar razones sobre sus objeciones.

El trabajo que implica volver sobre lo realizado exige siempre una explicitación, un reconocimiento y una sistematización del conocimiento implicado en la resolución de los problemas, las formas de obtenerlo y validarlo. Sin este proceso, los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela –las nociones y formas de trabajar en matemática– no tendrán a futuro las mismas posibilidades de reutilización.

En síntesis, «cómo» se hace matemática en el aula define al mismo tiempo «qué» matemática se hace, y «para qué» y «para quiénes» se la enseña, lo que plantea una disyuntiva central en relación con la construcción de las condiciones que posibilitan el acceso a la matemática de unos pocos o de todos.

Priorizar un tipo de trabajo matemático

Resulta pues vital que prioricemos en la escuela, desde el momento en que los niños se inician en el estudio de la matemática,

> la construcción del sentido de los conocimientos por medio de la resolución de problemas y de la reflexión sobre estos, para promover así un modo particular de trabajo matemático que esté al alcance de todos los alumnos.»
>
> Ministerio de Educación, 2006: 18-19.

Con respecto a la construcción del sentido a la que se refiere el párrafo de la cita, dice Guy Brousseau: «El sentido de un conocimiento matemático se define no solo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no solo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.» (Brousseau, 1983: 170).

Así, al seleccionar un conjunto de problemas para trabajar con una noción a enseñar, es necesario advertir que se trata de un recorte entre muchos posibles respecto de una colección más amplia cuyo estudio demandará varios años de escolaridad. Precisar los criterios que fundamentan los distintos recortes en cada nivel de concreción curricular da lugar a la explicitación del propósito particular que orienta un nivel, un ciclo, un año, una unidad de trabajo. Cabe destacar aquí que, en el nivel del aula, con la intención de no confundir a los alumnos, muchas veces el maestro evita incluir entre los problemas que elige para enseñar un contenido de aquellos que permiten analizar los límites de la noción en estudio, cuestión que debería ser tomada en la capacitación.

Otro didacta, Roland Charnay, avanza sobre una primera descripción de los problemas matemáticos que dan lugar a la construcción de sentido o, como él lo denomina, la «significación» de un conocimiento afirmando que

> «... la construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles:
>
> - un nivel 'externo': ¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?
>
> - un nivel 'interno': ¿cómo y por qué funciona tal herramienta? (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?» (Charnay, 1994: 53).

En cuanto a los niveles de significación, ningún proyecto de enseñanza debería descuidar la presencia equilibrada de ambos. Un énfasis en el nivel de significación externa no contribuye a los procesos de puesta en relación y generalización de las nociones en juego, y un énfasis en el análisis del funcionamiento de las herramientas –sin haber dado previamente lugar a su uso en contextos variados– obstaculiza la identificación de las situaciones donde estas resultan necesarias.

Por otra parte, Gerard Vergnaud despliega en «La teoría de los campos conceptuales» una caracterización de los tipos de conocimientos ligados a la construcción de un concepto y pone a los «saber hacer» en un pie de igualdad con los «saberes expresados», considerando que lo que permite y lo que define la adquisición de un concepto es la acción en situación en la que ambos (saber hacer y saber) se ponen en juego.

> «El saber-hacer no puede oponerse al saber, puesto que constituye su criterio y se fundamenta en él. Saber y saber-hacer son dos vertientes indisociables del pensamiento conceptual. [...]
>
> Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretende resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño.» (Vergnaud, 1990: 133-170)

Estas ideas estuvieron presentes en la elaboración de diversas producciones curriculares como los NAP y los diseños curriculares provinciales, como así también en distintos materiales de desarrollo curricular.

En los diferentes documentos curriculares se plantea como actividad principal de la clase de matemática la resolución de problemas y la reflexión sobre esta, lo que involucra para el maestro tanto la elección de problemas desafiantes pero adecuados para los conocimientos de sus alumnos, como una particular gestión de la clase cuya caracterización desarrollaremos en el Módulo 3 de este curso. En esta clase nos centraremos en la primera de estas cuestiones: la elaboración de criterios para seleccionar problemas, en particular para el eje «Enseñanza de la multiplicación y división».

Para atender a esta construcción de sentido será necesario precisar con qué criterios se seleccionarán los problemas que configuran el proyecto de enseñanza de las operaciones.

2. El enfoque didáctico y la enseñanza de la multiplicación y la división

Las nuevas ideas han impactado de diferente forma en las prácticas de enseñanza. Algunos docentes no modificaron sus prácticas y siguen enseñando «tal como lo hicieron siempre» o «como lo aprendieron». Otros han renovado algunas prácticas y expresan ideas tales como «Ya no tenés que dar solamente cuentas sueltas», «Yo siempre empiezo por la resolución de problemas» o «Es importante que los chicos expliquen cómo pensaron», lo que muestra distintos grados de apropiación de la propuesta.

En tanto capacitadores tendremos que pensar cómo dialogar con «todos» los docentes, sabiendo que algunos no han tenido oportunidad de interactuar con colegas para discutir el sentido de las transformaciones y otros las han interpretado adecuándolas a sus concepciones.

Según las historias personales de los actuales docentes, algunos conocieron el enfoque de enseñanza por medio de desarrollos curriculares; otros, en su formación inicial en los diversos profesorados o en la formación continua a través de distintos formatos de capacitación.

En función de la experiencia que vamos recogiendo en nuestra tarea de capacitación, nos preguntamos entonces: ¿cómo avanzar con los maestros en el análisis de las propuestas de enseñanza?, ¿qué asuntos atender en la capacitación en relación con la necesaria distancia entre una propuesta nueva y las prácticas habituales?

A continuación, enunciaremos primero, y profundizaremos luego, tres aspectos centrales en la enseñanza de la multiplicación y la división, abriendo «diálogos imaginarios» con los distintos docentes que podríamos encontrar en nuestras experiencias de capacitación.

- **Cada operación puede utilizarse para resolver diferentes problemas** asociados a diversos significados de la operación.
- **Cada problema puede resolverse con una variedad de procedimientos** y estos pueden involucrar distintas operaciones y diferentes escrituras.
- **Los cálculos que permiten resolver problemas aritméticos son de diferente tipo** y su uso depende de los instrumentos disponibles y el tipo de números involucrados, lo que da lugar a poner en juego propiedades de los números y de las operaciones.

2.1 Cada operación puede utilizarse para resolver diferentes problemas

Esta afirmación nos interpela con nuevas preguntas, tales como las siguientes: ¿qué entendemos por problema? ¿Cuáles son los distintos significados correspondientes a la multiplicación y a la división? ¿Cómo abordamos estos significados desde la capacitación?

Recomendamos al lector revisar las condiciones que debe reunir un buen problema enunciadas por Douady, R. (1983). «Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos». También disponible en http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady.

Entonces, ¿qué entendemos por problema? En los *Cuadernos para el aula* se afirma: «Consideramos que cada actividad constituye un problema matemático para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema y para hacerlo elabora un cierto procedimiento y pone en juego las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones». (Ministerio de Educación, 2006)

Esto nos permite sostener que no existe un problema si no atiende a los conocimientos de quien lo enfrenta. Una situación para la cual se dispone de una solución en forma inmediata no es un «problema» ya que no involucra un obstáculo.

Otra cuestión que hay que considerar si la noción que queremos trabajar cuando presentamos el problema es una «herramienta» de resolución de este o es un «objeto» de estudio. Veamos como caracteriza estas dos nociones su propia autora, Regine Douady.

«Para un *concepto matemático*, conviene distinguir su carácter 'instrumento' y su carácter 'objeto'. Por instrumento entendemos su funcionamiento científico en los diversos problemas que permite resolver. *Un concepto toma sentido por su carácter 'instrumento'*. No obstante, ese carácter pone en juego las relaciones que mantiene con los otros conceptos implicados en el mismo problema. Es decir, desde una óptica instrumental, no se puede hablar de un concepto sino de una red de conceptos que gravitan eventualmente alrededor de un concepto principal. También el aprendizaje deberá considerar tal conjunto.

Diremos que un instrumento es un instrumento adaptado si interviene en un problema justificando el uso del concepto del cual procede, por eficacia o necesidad. Un instrumento puede ser adaptado a varios tipos de problema. Recíprocamente, varios instrumentos pueden ser adaptados a un mismo problema. No obstante, cada uno tiene un cierto ámbito de validez [...].

Por *objeto* entendemos *el concepto matemático*, considerado como objeto cultural que tiene su lugar en una construcción más amplia que es la del conocimiento inteligente en un momento dado, reconocido socialmente. [...]

La actividad principal, en matemáticas, en el cuadro escolar, o en los centros de investigación profesional, *consiste en resolver problemas*, en plantear cuestiones. El investigador puede declarar resuelto un problema si puede justificar sus declaraciones según un sistema de validación propio de las matemáticas. En este camino, crea conceptos que juegan el papel de instrumentos para resolver problemas. Cuando pasa a la comunidad científica, el concepto es *descontextualizado* para que pueda servir nuevamente. Se convierte así, en objeto de saber.» (Douady, 1983)

En nuestro caso, al resolver un problema que requiera de la puesta en juego de una multiplicación o una división, los cálculos funcionan como una «herramienta», como un instrumento matemático que permite dar respuesta a la pregunta. En cambio, si proponemos un problema que implica analizar dos cálculos con los mismos números realizados con diferentes procedimientos, esos cálculos son «objeto de estudio». Del mismo modo, «producir una manera de realizar un cálculo» también es un problema. Ambos tipos de problemas formarán parte del proyecto de enseñanza.

Por otra parte, en los *Cuadernos para el Aula* se lee «... Al elegir o construir problemas para enseñar una noción con el propósito de que los alumnos construyan su sentido debemos tener en cuenta una diversidad de contextos, significados y representaciones» (Ministerio de Educación, 2006: 19). En esta clase profundizaremos el tema de contextos y significados.

De los contextos

En relación con los contextos, se dice: «Para cada noción es posible considerar diferentes contextos que nos permitan plantear problemas en los que la resolución requiera su uso. Estos contextos podrán ser *matemáticos o no*, incluyendo entre estos últimos los de la vida cotidiana, los ligados a la información que aparece en los medios de comunicación y los de otras disciplinas» (op. cit.: 21).

De nuestra experiencia como capacitadores podemos afirmar que, en ocasiones, se interpreta que «hacer cuentas» es equivalente a trabajar problemas en el contexto matemático. Esta asimilación nos interpela a reflexionar en la capacitación sobre la idea de que, si bien resolver cuentas es un trabajo en ese contexto, puede tanto apuntar a afianzar el dominio de una técnica como constituirse en un buen problema. Para ello es necesario que la actividad planteada sobre las cuentas permita que se establezcan nuevas relaciones o se descubran nuevos conceptos y no se trate solo de ejercitar una sucesión fija de pasos.

En el mismo texto dice: «Los contextos tendrán que ser *significativos* para los alumnos, es decir que implicarán un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y sus experiencias sociales y culturales previas. Asimismo, los conocimientos involucrados en el problema deberán cobrar interés para ellos y ser coherentes desde el punto de vista disciplinar» (op. cit.: 20).

En relación con la significatividad de los contextos, habrá que poner el foco en la capacitación en dos cuestiones. La primera es que no solo es significativo un contexto que aluda al mundo cercano, a las experiencias de la vida cotidiana. También lo son aquellos contextos que los chicos conocen mediante los cuentos, historias, viajes, programas de televisión, etc. Asimismo son significativas las curiosidades, «trucos» numéricos, acertijos, siempre que los conocimientos requeridos para abordar la pregunta sean aquellos que los alumnos conocen.

La segunda cuestión es que, al elegir los contextos para elaborar problemas y formular las preguntas, es importante revisar que las preguntas tengan sentido en sí mismas, es decir, que aludan a problemas reales o verosímiles. Muchas veces, las preguntas no hacen referencia al sentido que tiene resolver el problema. Cabría preguntarse frente a ellas: ¿quién puede necesitar saberlo? y ¿para qué? Consideremos, por ejemplo: «¿cuántos años tienen entre la mamá y la hija?», «¿cuántas manchas tiene una jirafa?». Si pretendemos que los alumnos consideren que la matemática nos provee de herramientas útiles para resolver «verdaderos problemas», tendremos que cuidar que lo que se pregunta tenga sentido.

Un contexto que podría ser utilizado en la clase de matemática es el de los juegos. Su inclusión va más allá de la idea de despertar el interés, pues permite a los alumnos resolver problemas que tienen sentido y que «hagan matemática, es decir, elaboren estrategias propias, utilicen las representaciones que consideren adecuadas, discutan con sus pares, expliquen sus ideas, den razones de sus procedimientos y resultados, confronten sus producciones con las de otros, acepten críticas y otros puntos de vista» (Chemello, Agrasar, Chara, 2001: 4).

Este recurso de enseñanza da lugar a plantear una considerable cantidad de problemas con una dinámica que permite a los alumnos acordar resultados, discutir procedimientos entre ellos.

En relación con este recurso, el foco de la capacitación se suele poner no solo en jugar efectivamente sino también en analizar posibles estrategias de juego basadas en diferentes conocimientos, considerar variantes al cambiar «algo» en la situación: los materiales, la organización del grupo, las reglas.

Será también interesante elaborar con los docentes actividades para plantear a los niños luego de jugar –algunas de juego simulado y otras intramatemáticas– y discutir a qué conclusiones, reglas y formulaciones podrían arribar los alumnos. Cuando en la capacitación se da lugar a este tipo de elaboración, las actividades en las que los alumnos deben decidir cómo jugar o quién gana son más frecuentes que las que apuntan a analizar jugadas de otros, o a elaborar una explicación sobre por qué se jugó de cierta forma.

Otro aspecto a tener en cuenta en relación con los problemas que se eligen es la forma en la que se presenta la información: un enunciado verbal, una representación gráfica, una tabla, etc. Al respecto, ya en los CBC se señala la necesidad de incluir «la localización, lectura e interpretación de información matemática sencilla presentada en forma oral, escrita y visual; la interpretación de las relaciones entre los datos y las incógnitas a través de representaciones concretas, gráficas o simbólicas; la escucha e interpretación de consignas, enunciados de problemas e información matemática sencilla» (CBC, 1995: 108-110).

Estos contenidos son fundamentales para la comprensión y la resolución de problemas y atraviesan todo el trabajo matemático en el aula. En algunas jurisdicciones del país los diseños curriculares los incorporaron a veces a través de un eje específico llamado «Tratamiento de la información», para destacar su relevancia y transversalidad. En otras jurisdicciones fueron incluidos en cada uno de los ejes disciplinares ya que, en el marco del aprendizaje, estos contenidos no se desarrollan como objetos de estudio en sí mismos sino como cuestiones presentes en los problemas de todos los bloques.

Es de destacar que, si bien era un eje nuevo en los CBC, las capacitaciones realizadas sobre este aspecto tuvieron logros considerables.

Actividad recomendada

Revise diversos textos escolares que circulan en las escuelas de su región y analice los contextos en los que son presentados los problemas.

De los significados

Al referirnos a los significados de una operación estamos considerando la diversidad de situaciones que esta resuelve, lo que permite agruparlas en categorías en función de características de las cantidades que involucran y de las relaciones entre ellas.

En «Los problemas de tipo multiplicativo», Vergnaud comienza planteando una advertencia respecto de la forma de escribir las relaciones involucradas: «Se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas –definimos así las relaciones que comportan una multiplicación o una división–. La más importante de ellas, que se utiliza para la introducción de la multiplicación en la escuela primaria y que forma la trama de la mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria; por ello no está bien representada en la escritura habitual de la multiplicación: a *x* b = c, ya que dicha escritura no comporta más que tres términos» (Vergnaud, 1991: 197).

A partir de allí comienza a hacer un análisis detallado señalando que «pueden extraerse numerosas clases de problemas, según la forma de la relación multiplicativa; el carácter discreto o continuo de las cantidades que intervienen; las propiedades de los números utilizados, etc.» (Vergnaud, 1991: 197). Distingue luego tres clases de problemas:

- *Isomorfismo de medidas*

«El isomorfismo de medidas pone en juego cuatro cantidades, pero en los problemas más simples se sabe que una de estas es igual a 1. Hay entonces tres grandes clases de problemas, según que la incógnita sea alguna de las otras tres cantidades.»

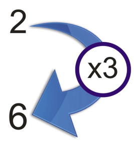
multiplicación	división	división
	búsqueda del valor unitario	búsqueda de la cantidad de unidades
1 ________ a B ________ x	1 ________ x B ________ c	1 ________ a X ________ c

«Cada una de estas tres clases se subdivide en numerosas subclases [...] que presentan dificultades muy diferentes» (Vergnaud, 1991: 218).

Estas diferencias surgen a partir de incluir números enteros pequeños o grandes, números decimales mayores o menores que 1, y dan lugar a problemas que pueden ser difíciles para muchos niños al final de la escuela primaria.

- *Un solo espacio de medidas*

«El análisis en términos de operadores-escalares es fácilmente comprendido por los niños; pero este implica una distinción entre medida y escalar [......] Hacen falta dos metros de tela para hacer una falda, hacen falta tres veces más para hacer un conjunto. Entonces, faltan seis metros para hacer un conjunto» (Vergnaud, 1991: 220-221).



Como puede observarse, no hay en este ejemplo más que un tipo de medidas: los metros de tela. Este caso permite distinguir tres tipos de problemas: uno que involucra la multiplicación y dos de divisiones: búsqueda de una medida y búsqueda de un escalar.

Entendemos que no se trata de analizar con los niños los problemas en términos de operadores y escalares sino de referirnos a «números solos» y «números que expresan medidas».

- *Producto de medidas*

«Esta forma de relación consiste en una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional. [...] Permite distinguir dos clases de problemas:

Multiplicación: Encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales.

División: Encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida producto [...] [También aquí aclara que] se deben distinguir numerosas subclases, según las propiedades de los números utilizados (enteros, decimales, números grandes, números menores que 1) y según los conceptos a los cuales hacen referencia.» (ibídem)

Al lector interesado en profundizar en estos análisis le recomendamos la lectura del capítulo de G. Vergnaud «El campo multiplicativo» de *Los niños, los números y la realidad*.

En libros y documentos curriculares, diversos autores han retomado estas categorías (isomorfismo de medidas, un espacio de medidas, producto de medidas) y, en su afán por lograr que los docentes presenten a sus alumnos una variedad de situaciones problemáticas dentro del campo multiplicativo, produjeron distintas clasificaciones de los problemas y/o los nombraron de formas diversas. En algunos casos, al nombrarlas de diferente manera se ponen en evidencia otros aspectos del concepto que lo enriquecen.

Por ejemplo, Parra y Saiz en *Enseñar aritmética a los más chicos*, al referirse a algunos problemas de división conocidos en ciertos libros como de «partición» (*Los chicos juntaron 75 latas. Para mandarlas, las colocaron en cajas de 25 latas cada una ¿cuántas pudieron llenar?*), los nombran como «de medición» ya que se considera 1 lata como una unidad de medida con la cual se medirá la colección de latas y 25 latas es la medida de esa cantidad.

Otro ejemplo similar se presenta en el *Documento de actualización curricular N° 4* del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires al abordar los sentidos de la división, ya que se diferencian problemas de «repartos» e «iteraciones». Dentro de los primeros se alude tanto a los que buscan determinar el valor de cada parte –denominados de «reparto» en otros textos– como a los que llevan a determinar la cantidad de partes –denominados de «partición» en otros textos–. Los problemas llamados de «iteraciones» (*Hoy es Domingo. ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días?*) también se podrían pensar como problemas de partición en los que interesa conocer el resto.

En *Las operaciones en el primer ciclo,* Broitman (1999) presenta, en relación con la multiplicación, los problemas de proporcionalidad, las situaciones que involucran organizaciones rectangulares mediante baldosas, cuadraditos, filas y columnas de asientos y botones en portero eléctrico, y los problemas en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones.

Las situaciones que involucran organizaciones rectangulares aparecen en los *Cuadernos para el aula* como problemas de «proporcionalidad» ya que, al considerar la forma en la que los niños los pueden resolver, es posible pensarlos «en una fila, 5 baldosas; en 3 filas, 15 baldosas».

Dada esta diversidad, en relación con la capacitación nos podemos plantear tres cuestiones: ¿cómo trabajar con estas clasificaciones? ¿Es posible y tiene sentido unificarlas de manera que haya una única clasificación? ¿Qué le debe llegar de estas clasificaciones al alumno?

Del primer análisis realizado por Vergnaud en el que para clasificar los problemas se tenían en cuenta la cantidad de espacios de medidas involucrados (un solo espacio de medidas, dos espacios en isomorfismo de medidas y tres en producto de medidas) hemos avanzado a una variedad de clasificaciones que podrían «desconcertar» a los docentes.

Sin expedirnos por la elección de una u otra, sería conveniente que no perdamos de vista que el propósito que llevó a estos análisis es el de enriquecer las prácticas de los alumnos a propósito de un mismo objeto matemático mediante la presentación de diversas situaciones que se resuelven con una misma operación.

En relación con quiénes son los destinatarios de estas clasificaciones, no dudamos en sostener que esta es información didáctica para que los docentes puedan enriquecer la enseñanza y no se trata de que los chicos clasifiquen problemas ni conozcan estos nombres.

Actividad recomendada

Identifique, en los documentos curriculares o textos de didáctica que utilizan los docentes en su región, la clasificación presentada.

2.2 Cada problema puede resolverse con una variedad de procedimientos

Cuando se presenta un problema aritmético a los alumnos, estos pueden desplegar una variedad de procedimientos utilizando distintas operaciones y recursos, siempre que en la clase se promueva un tipo de trabajo matemático como el que se describe en los *Cuadernos para el aula*, y que supone para el alumno lo siguiente:

- «*Involucrarse* en la resolución del problema presentado vinculando lo que quiere resolver con lo que ya sabe y plantearse nuevas preguntas.
- *Elaborar* estrategias propias y compararlas con las de sus compañeros considerando que los procedimientos incorrectos o las exploraciones que no los llevan al resultado esperado son instancias ineludibles y necesarias para el aprendizaje.
- *Discutir* sobre la validez de los procedimientos realizados y de los resultados obtenidos.
- *Reflexionar* para determinar qué procedimientos fueron los más adecuados o útiles para la situación resuelta.
- *Establecer* relaciones y elaborar formas de representación, discutirlas con los demás, confrontar las interpretaciones sobre ellas y acerca de la notación convencional.
- *Elaborar* conjeturas, formularlas, comprobarlas mediante el uso de ejemplos o justificarlas utilizando contraejemplos o propiedades conocidas.
- *Reconocer* los nuevos conocimientos y relacionarlos con los ya sabidos.
- *Interpretar* la información presentada de distintos modos, y pasar de una forma de representación a otra según su adecuación a la situación que se quiere resolver.
- *Producir* textos con información matemática avanzados en el uso del vocabulario adecuado». (Ministerio de Educación, 2006: 19)

Hoy los problemas son concebidos como la ocasión de construir nuevos conocimientos y abordar con lo docentes este cambio del lugar del problema es un gran desafío de la capacitación. «En principio, un problema que apunta al aprendizaje de un nuevo objeto matemático debería ofrecer al alumno la posibilidad de establecer nuevas relaciones. Estas nuevas relaciones, cuya producción se basa en conocimientos que el alumno ya tiene, constituirán un punto de apoyo a partir del cual el docente ayudará a identificar algo nuevo» (Sadovsky, 1999: 146).

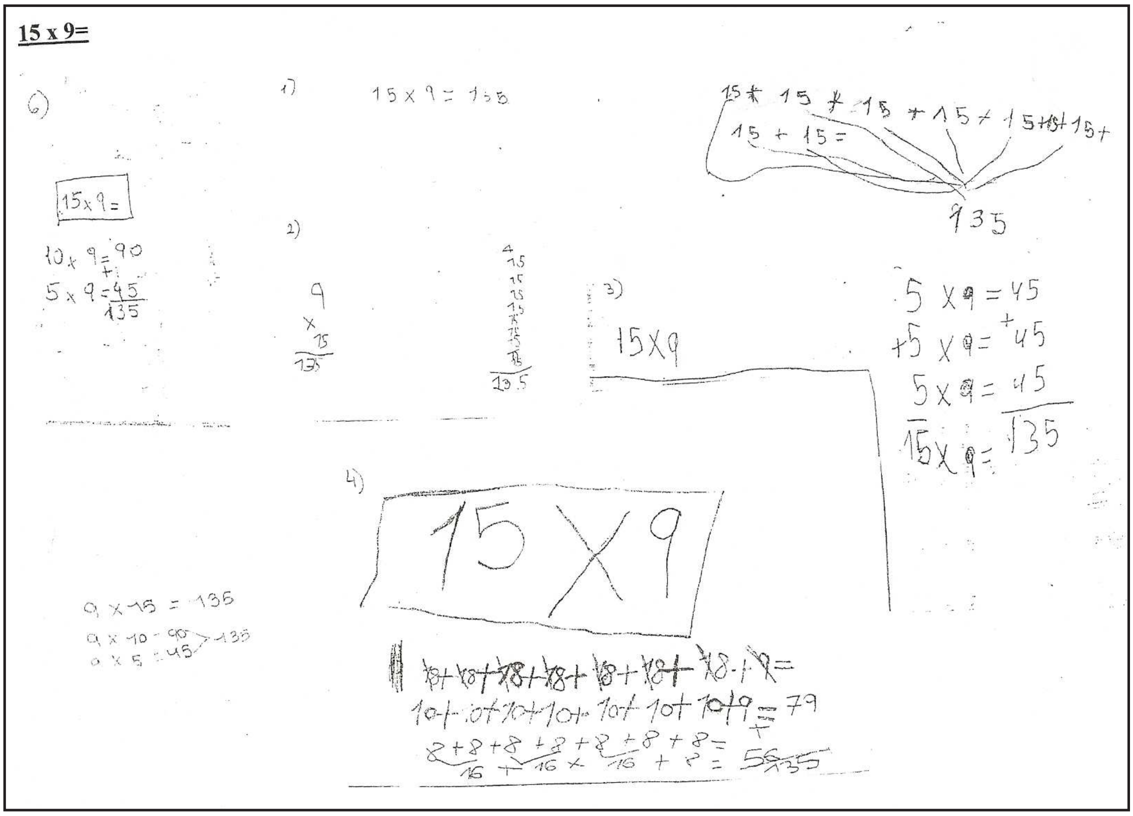
Desde esta perspectiva, cuando se presenta un problema, los alumnos producen una solución usando los conocimientos que tienen disponibles, aunque aún no conozcan la manera más eficaz de hacerlo. Los conocimientos de base les permiten abordar y elaborar procedimientos probablemente «más largos y costosos» que el procedimiento experto, pero que pueden funcionar como punto de apoyo para arribar luego a los conocimientos que se quieren enseñar. Veamos dos ejemplos de situaciones que constituyeron «verdaderos problemas» para los alumnos.

Para acompañar la lectura

Lea los ejemplos que siguen y analice los procedimientos de los alumnos. ¿Qué conocimientos previos les permiten resolver qué problemas? ¿Qué «nuevas relaciones» se podrán introducir?

Ejemplo 1[1]

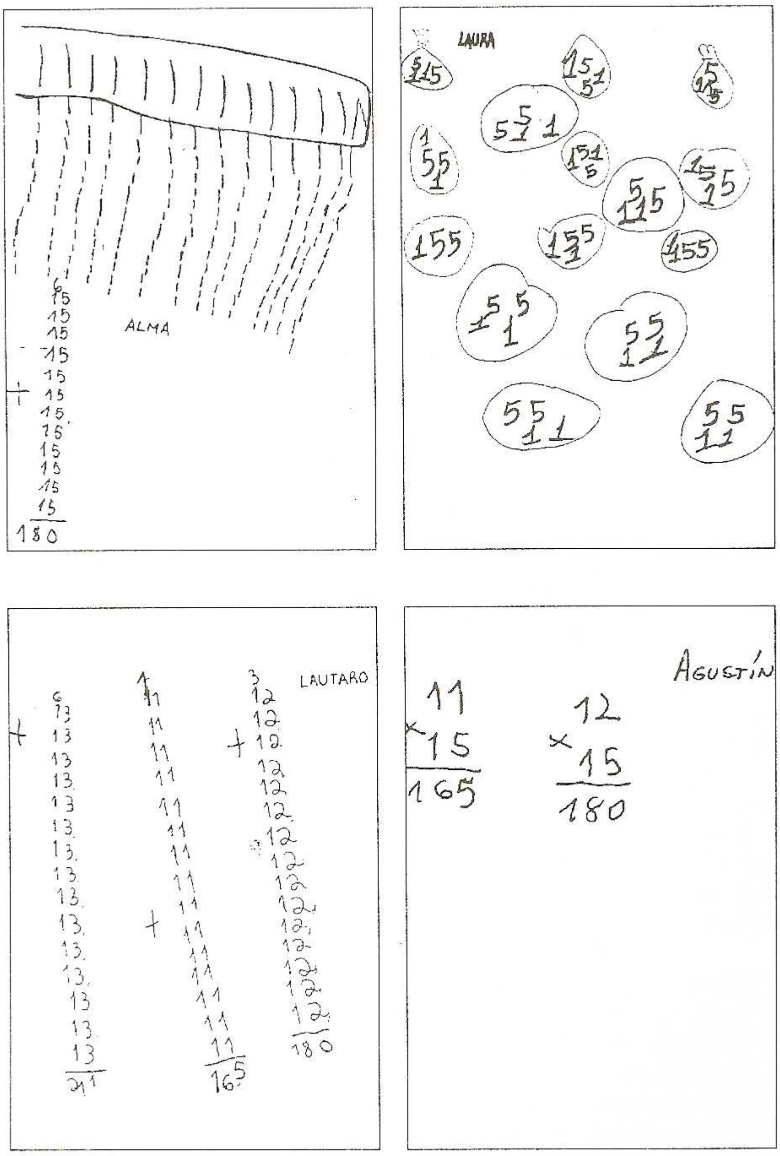
- Resolver el siguiente cálculo: 15 x 9.



[1] Estas producciones de alumnos han sido cedidas por la Lic. Mercedes Etchemendy.

Ejemplo 2 (Quaranta 2002: 219)

> Una panadería fabrica 180 tortas por día y las entrega a cada una de sus 15 sucursales de modo que todas reciban la misma cantidad de tortas. ¿Cuántas tortas llegan a cada sucursal?



En las producciones del ejemplo 1, realizadas por alumnos de tercer grado para resolver multiplicaciones con números de una y dos cifras, y en las del ejemplo 2, realizadas para resolver un problema de reparto, se puede observar que los alumnos pueden encontrar una respuesta, sin haber trabajado un procedimiento experto.

Se sugiere consulten *Cuadernos para el aula. Matemática 3*, «Plantear situaciones para multiplicar y dividir» (pag. 63) para analizar los primeros procedimientos utilizados por los alumnos en problemas de división.

Dado que el tratamiento de esta variedad de procedimientos en la clase resulta todo un desafío para el maestro, y que su articulación con los algoritmos tradicionales es una preocupación que una y otra vez aparece en situaciones de capacitación, abriremos aquí un paréntesis en el desarrollo de esta clase para abordar esta problemática. Para hacerlo, nos preguntamos:

1) ¿Qué conocimientos usan los alumnos en las escrituras de sus procedimientos?

2) ¿De qué forma se articulan los procedimientos originales con otros más avanzados y sintéticos?

Para responder a la primera pregunta, analicemos los dos ejemplos. Es importante considerar que al realizar estas producciones los chicos usan diferentes escrituras y diferentes conocimientos. Por ejemplo, al multiplicar dos números de dos cifras en el ejemplo 1, algunos recurrieron a las sumas sucesivas, otros descompusieron los números de distintas formas y usaron la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Otros extendieron un procedimiento usado para sumar números y no llegaron al resultado correcto.

En el ejemplo 2 vemos que recurren a palitos y sumas, globos con números, multiplicaciones por una cifra. En este caso, los alumnos ya conocen la multiplicación por una cifra y el signo *x*.

Para acompañar la lectura

Consulte en «Plantear situaciones para multiplicar y dividir con distintos significados» de *Cuaderno para el aula. Matemática 2* cuáles son los primeros procedimientos que usan los alumnos para resolver problemas de multiplicación o de división cuando aún no conocen el signo en cuestión y el modo como el docente puede presentar el signo asociándolo con lo realizado en la clase para que el nuevo conocimiento esté cargado de sentido.

Con respecto a las propiedades de las operaciones que aparecen en los procedimientos inventados, están usadas como una regla que funciona desde el significado que los alumnos atribuyen a cada paso que hacen, sin preguntarse si vale o no en matemática. La atribución de significado a las escrituras que realizan les permite, a la vez, un verdadero control sobre lo que hacen.

El trabajo de análisis de lo producido en la clase –incluidas las reglas de acción que Vergnaud denomina *teorema en acto*– es fundamental para reutilizarlas luego en nuevos problemas. [«Podemos, si se desea, distinguir entre *teorema en acto y teorema explícito*. Cuando el niño de 7 u 8 años utiliza en sus cálculos relacionales la propiedad transitiva de la relación de orden, pone en funcionamiento un teorema que no es capaz de explicitar». (Vergnaud, 1983: 99)] La reflexión sobre los procedimientos utilizados dará lugar a la explicitación de las propiedades, por ejemplo cuando se compara lo que hicieron varios alumnos que las usaron o generando una nueva actividad para investigar cuándo se cumple y cuándo no para diferentes números.

Es de destacar que solo en una clase en la que se favorecen las producciones personales y en la que se ha trabajado sistemáticamente con distintos recursos de cálculo será posible que los alumnos desplieguen estos procedimientos.

Estas consideraciones dan cuenta de la necesidad de «enriquecer la mirada» de los docentes en la capacitación a propósito de los posibles procedimientos de cálculo que podrían utilizar los alumnos, identificando los conocimientos involucrados en ellos. Para ello, será necesario contar con una diversidad de alternativas de procedimientos acertados y erróneos para analizar en la capacitación, teniendo en cuenta que si bien un alumno podría sorprender con una nueva estrategia, estas son limitadas.

Asimismo, será importante analizar que no se trata de enseñar un nuevo procedimiento en lugar del conocido para que todos los alumnos lo utilicen, sino de abrir el juego para que cada uno produzca el suyo.

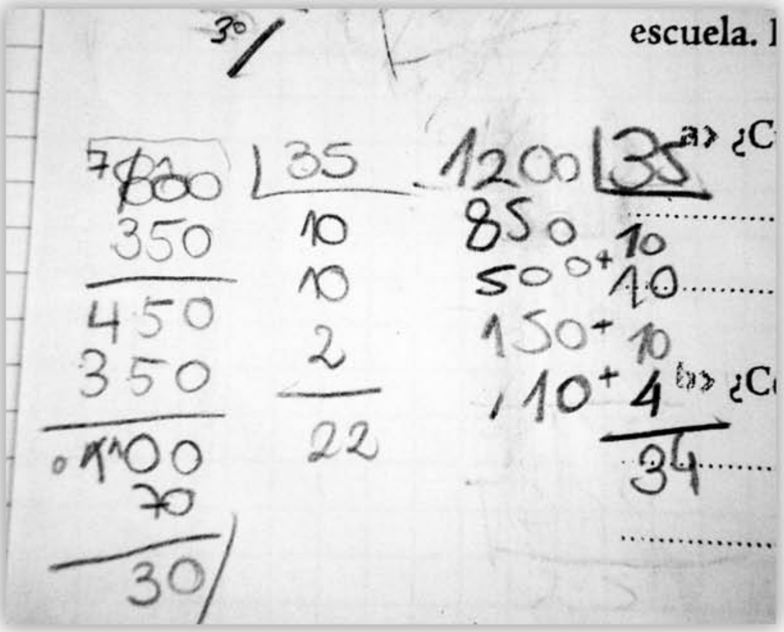
Retomemos la segunda pregunta. Es frecuente que los docentes pregunten cuál es la manera en que los algoritmos convencionales pueden ser tratados en la escuela desde el enfoque propuesto.

En los NAP se plantea, para todas las operaciones, que es fundamental adecuar el procedimiento de resolución a los números involucrados en el cálculo y que es posible avanzar desde la producción y análisis de procedimientos originales a otros más sintéticos. Esto último requiere que los alumnos reorganicen escrituras, acortándolas, transformándolas en otras del mismo valor numérico y fundamentando las modificaciones en las propiedades de las operaciones.

En el caso particular de la división, ¿cómo se puede hacer avanzar a los alumnos desde procedimientos que ellos inventan a otros más económicos? y ¿es posible establecer puentes con el algoritmo tradicional?

Veamos algunos ejemplos de procedimientos originales de los chicos.[2]

[2] Las producciones que siguen fueron cedidas por la Lic. Graciela Zilberman.



En estos procedimientos, vemos tres ejemplos de cuentas largas, con restas sucesivas: 2346 : 36, 800 : 35 y 1200 : 35 donde aparece reiteradamente el 10 en el cociente.

Es de destacar que en estos casos los chicos trabajan con el dividendo considerado en forma global y no cifra a cifra, y dominan los productos por la unidad seguida de ceros, después de un intenso trabajo de cálculo mental. Para promover el acortamiento de estos procedimientos, luego de trabajar con los productos por potencias de la base, es decir, por 200, 500, 40, etc., analizando y explicitando las relaciones entre multiplicar por 2, por 20, por 200, por 5, por 50, por 500, etc, se puede proponer *Ahora hacela al lado más corta* o, si está «desordenado», *Volvé a copiar la cuenta más ordenada y fijate si se podría hacer en menos pasos.*

Por otra parte, conviene conversar en la capacitación acerca de que, como los procedimientos que se realizan dependen de los conocimientos disponibles, distintos alumnos de una clase pueden resolver la misma cuenta con procedimientos diferentes. Y también que un mismo alumno puede resolver algunas cuentas con un procedimiento y otras, con otros.

También habrá que debatir en la capacitación la relación entre el algoritmo tradicional y los procedimientos originales, atendiendo a los conocimientos involucrados en cada uno de ellos.

El algoritmo clásico de división por dos cifras supone ir trabajando cifra a cifra, pensando en unidades de mil, centenas, decenas, unidades y además involucra realizar en cada paso una multiplicación y una resta por complemento para cada número. La escritura no explicita más que el resultado de este trabajo, sin registrar los pasos intermedios, con lo que resulta hermética respecto del proceso. Por otra parte, cabe señalar que, usualmente, la resta por complemento no ha sido utilizada antes por los niños.

$$\begin{array}{rl} 1200 & \underline{\big|\;35\;} \\ 150 & \;\;34 \\ 10 & \end{array}$$

«Tomo el doce. Doce dividido tres ... cuatro, no ... está tres. Tres por cinco quince al veinte ... cinco, me llevo dos. Tres por tres nueve y dos que me llevaba once, al doce uno. Bajo el cero
El tres en el quince entra cinco veces... me parece que me paso... está cuatro.... Cuatro por cinco veinte, al veinte cero, me llevo dos, cuatro por tres doc, y dos catorce, al quince uno.»

En los intentos por hacer más transparente esta cuenta, durante algunos años se propuso escribir la resta que estaba implícita con lo que la misma cuenta quedaba del siguiente modo:

$$\begin{array}{rl} 12^{1}00 & \underline{\big|\;35\;} \\ \underline{105} & \;\;34 \\ 0150 & \\ \underline{140} & \\ 10 & \end{array}$$

«Tomo el doce. Doce dividido tres... cuatro, no... está tres. Tres por cinco quince, pongo el cinco, me llevo uno...tres por tres nueve y uno diez.
Cero menos cinco no se puede, tomo uno, diez menos cinco, cinco. Como el dos quedó en uno, uno menos uno cero y uno menos uno cero. Bajo el cero...etc.»

Esto simplificó en parte la ejecución del algoritmo ya que la resta se realiza en forma escrita tal como se aprendió y no por complemento. Sin embargo, a veces se pide a los niños que pasen de este último procedimiento al tradicional sin advertir que lo que se les pide no es que hagan mentalmente lo que antes hacían por escrito: tienen que restar de otra forma, mentalmente, y operando cifra a cifra, lo que resulta un desafío que muchas veces los supera.

Como puede observarse, en las producciones que analizamos antes, estos alumnos hacen *otra cosa*: consideran el dividendo en forma global, multiplican el divisor por un número que les permita obtener un producto aproximado al dividendo, restan y vuelven a multiplicar para ir ajustando cada vez cuántas veces «entra» el divisor en el dividendo. Finalmente, suman los resultados parciales. En el caso analizado, progresivamente se podría pasar

De... ⟶ A

$$\begin{array}{rl} 12^{1}00 & \underline{\big|\;35\;} \\ \underline{350} & \;\;10 \\ 850 & \;\;10 \\ \underline{350} & \;\;10 \\ 400 & \;\;\;\;2 \\ \underline{350} & \;\;\;\;\underline{2} \\ 150 & \;\;34 \\ \underline{70} & \\ 80 & \\ \underline{70} & \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1200 & \underline{\big|\;35\;} \\ \underline{700} & \;\;20 \\ 500 & \;\;10 \\ \underline{350} & \;\;\;\;\underline{4} \\ 150 & \;\;34 \\ \underline{140} & \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1200 & \underline{\big|\;35\;} \\ \underline{1050} & \;\;30 \\ 150 & \;\;\;\;\underline{4} \\ \underline{140} & \;\;34 \\ 10 & \end{array}$$

Este procedimiento que suele denominarse de aproximaciones por productos o de restas sucesivas, y que permite a los niños tener un mejor control tanto del resultado final como de los pasos intermedios, difiere del clásico en la forma de concebir la descomposición del dividendo y en la realización escrita de la resta.

Al respecto, será importante plantear en la capacitación que, desde esta perspectiva, el algoritmo tradicional no es el único económico y tampoco el más conveniente, dada su distancia con los procedimientos originales de los alumnos y que resulta entonces poco productivo insistir en que los alumnos pasen de uno a otro.

Por otra parte, cabría preguntar, siguiendo a Lucrecia Iglesias:

> «¿Qué valores justifican el aprendizaje escolar de ese algoritmo (el tradicional) frente al uso cada vez más corriente de la calculadora? ¿Es posible organizar la enseñanza del mismo, de modo que los alumnos puedan construirlo reflexivamente y aplicarlo con actitud crítica? ¿Hay otras formas algorítmicas que los alumnos puedan construir autónomamente para resolver situaciones concretas? ¿Es válido estimular tales formas sin que los alumnos alcancen una mecanización eficaz en términos del algoritmo tradicional?» (Iglesias, 2002: 30)

Este cuestionamiento esta vigente y podrá ser el punto de partida de interesantes reflexiones en la capacitación.

Para acompañar la lectura

Lea «Plantear situaciones para avanzar desde los distintos procedimientos para multiplicar y dividir, hacia los algoritmos usuales» del *Cuaderno para el aula: Matemática 3* y «Plantear situaciones para pasar desde los distintos procedimientos para multiplicar y dividir hacia otros más económicos» del *Cuaderno para el aula: Matemática 4,* y consulte cómo se propone allí la enseñanza del algoritmo.

Retomando nuestro análisis acerca de la variedad de procedimientos que pueden utilizarse para resolver un problema, tengamos en cuenta que si se busca que los alumnos tengan control sobre estos pudiendo determinar su pertinencia y economía en función de los números involucrados, el algoritmo por aproximaciones resulta pertinente, pero será necesario además promover la utilización de distintos tipos de cálculo, incluyendo necesariamente el uso reflexivo de la calculadora y del cálculo mental, como veremos en el apartado siguiente.

2.3 Diferentes tipos de cálculo según los instrumentos y el tipo de números

Queremos insistir en la necesidad de trabajar en la capacitación sobre la idea de que según los requerimientos de cada situación, es posible realizar diferentes tipos de cálculos, exactos o aproximados y, para realizarlos, las estrategias dependen de los instrumentos disponibles, el tipo de números que se ponen en juego y las propiedades de las operaciones.

Dado que esta cuestión ha sido trabajada en diferentes documentos y artículos publicados en el país, recomendamos las siguientes lecturas:

Recomendación de lectura

Chemello, G.(1997). «Las cuentas, ¿son un problema?». En: *Los CBC y la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires: AZ. Aquí la autora hace una clara diferenciación de los distintos tipos de cálculo.

Parra, C. (1994) «El cálculo mental». En: C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós. En este libro se propone la enseñanza del cálculo mental tratando de definir su relación con otros aspectos centrales del aprendizaje de la matemática, diferenciándolo del sentido que su inclusión cobraba en prácticas escolares previas. También aporta sugerencias para el tratamiento del cálculo mental en clase y una posible secuenciación a lo largo de la escuela primaria.

Bressan, B. (1996). *La estimación, una forma importante de pensar en Matemática.* Prov. de Río Negro: Consejo Provincial de Educación. Se fundamenta matemática y didácticamente sobre la estimación, pensada como un contenido escolar que puede ser trabajado desde Primer Ciclo. También se presentan ejemplos de actividades que involucran el uso de esta estrategia. También disponible en http://www3.educacion.rionegro.gov.ar/gcurri/matematica/matematica1.htm.

Sadovsky, P. (coord.), M. Quaranta y H. Ponce (2006). *Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la enseñanza*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección de Currícula. Incluye una introducción en la que se abordan las diferencias y relaciones entre el cálculo mental y el algorítmico y también secuencias de actividades para la enseñaza del cálculo a propósito de la adición y sustracción; la multiplicación y división y el sistema de numeración. También disponible en http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_naturales_web.pdf.

Si consideramos que muchos docentes han tenido algún contacto con estas lecturas, en la capacitación será interesante abordar, por ejemplo, los siguientes temas:

- Las diferencias entre los distintos tipos de cálculo (algorítmico-pensado, mental-con calculadora-escrito, exacto-aproximado), precisando cuáles son los procedimientos de cálculo escrito y el repertorio de cálculos memorizados que es necesario enseñar hoy para que los alumnos puedan decidir de manera autónoma cuándo usar un tipo de cálculo u otro, controlando la razonabilidad de los resultados que obtienen.
- Elaborar criterios para organizar secuencias de trabajo con el cálculo planteando problemas que den lugar a una diversidad de procedimientos frente a la tendencia a homogeneizarlos.
- Debatir sobre el sentido que tiene avanzar en la fundamentación de los procedimientos mediante propiedades, desde su uso como teorema en acto hacia su explicitación.

También convendrá destinar algún tiempo a la discusión sobre la implementación de juegos reglados, que son un contexto valioso para la elaboración y práctica de reglas de cálculo, avanzando sobre la idea de que no solo por jugar se aprende sino que es necesario jugar bajo ciertas condiciones.

Se recomienda leer la introducción del material de juegos en *Matemática EGB 1. El juego como recurso para aprender* (Chemello, Agrasar y Chara). Este es un material para docentes en el que se fundamenta por qué el juego es un «buen recurso» de enseñanza y cómo se puede usar el juego en el aula.

Sintetizando, se trata de analizar con los docentes que hoy le contraponemos a una enseñanza basada en la comunicación de las nociones, una basada en la construcción de los conocimientos. Se aprende matemática no solo de la resolución, sino también de la reflexión sobre lo realizado. Pensar y poner a prueba las estrategias, reconocer los alcances y límites de los procedimientos empleados, sistematizar lo descubierto y formularse nuevas preguntas son tareas que no pueden estar ausentes de nuestro trabajo en las escuelas.

Actividad

1. Busque el Anexo a clase 3 en la sección Archivos de este campus. En él se presentan actividades formuladas para indagar los saberes de un grupo de niños al finalizar tercer grado. Luego realice las siguientes actividades que siguen.

   Anexo a clase 3.

   a. En cada actividad identifique, si es posible:
      - ¿Qué significados de las operaciones aparecen?
      - ¿En qué contextos se plantean las distintas actividades?

      Para hacerlo puede organizar un cuadro asignando una columna para identificar las actividades, otra para los significados y otra para los contextos.

   b. Elija uno de los problemas y desarrolle tres procedimientos que podría anticipar como posibles producciones de los niños.

   c. Identifique y explicite los conocimientos involucrados en cada uno de los procedimientos desarrollados en el ítem anterior.

2. Considere el caso de capacitación analizado en el encuentro presencial y suponga que tiene que coordinar el primer taller presencial.

   a. Elabore entre 3 a 5 afirmaciones que podría incluir en un Power Point para presentar el enfoque del área en relación con la selección de problemas para la enseñanza del campo multiplicativo. Para hacerlo, tenga en cuenta los distintos elementos que, en relación con el enfoque didáctico del área, se han desarrollado en esta clase.

   b. Envíe a su tutor en un documento de Word su producción, o la de su grupo, antes de la próxima clase.

Referencias bibliográficas

BROUSSEAU, G. (1983). «Les obstacles epistémologiques et les problémes d'enseignement». *Recherches en didactique des mathématiques*, 4 (2).

BROITMAN, C. (1999). *Las operaciones en el primer ciclo*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

CONSEJO FEDERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

CHARNAY, R. (1994). «Aprender (por medio de) la resolución de problemas». En: C. Parra y I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós.

CHEMELLO, G. (coord.), M. Agrasar y S. Chara (2001). *Matemática EGB 1. El juego como recurso para aprender.* Buenos Aires: Ministerio de Educación. También disponible en www.me.gov.ar/curriform/matematica.html .

DOUADY, R. (1983). «Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos». En: *Cuaderno de didáctica de la matemática N° 3*. París: Université Paris Diderot-Paris 7. Traducido en *Selección Bibliográfica I, Programa para la Transformación de la Formación Docente*. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación, 1994. También disponible en http://www.slideshare.net/favalenc/dialectica-douady.

IGLESIAS, L. (2002). «Aula Presente». *Elementos de matemática*, XVI (63).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2006). «Enseñar Matemática en el primer ciclo». En: *Cuadernos para el aula NAP*. Buenos Aires: Ministerio de Educación. También disponible en www.me.gov.ar/curriform/matematica.html.

PARRA, C. e I. Saiz (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos*. Rosario: Homo Sapiens.

QUARANTA, M. E. y S. Wolman (2002). «Discusiones en las clases de matemáticas: ¿qué se discute?, ¿para qué? y ¿cómo?». En: M. Panizza (comp.), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB: Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós.

SADOVSKY, P. (1999). «Sentido formativo de la matemática en la escuela». En: *Marco General del Pre Diseño Curricular*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN. DIRECCIÓN DE CURRÍCULA (1997). *Documento de actualización curricular N° 4. Matemática*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenas Aires. También disponible en http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc4.pdf.

VERGNAUD, G. (1983). «Actividad y conocimiento operatorio». En: C. Coll (comp.), *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid: Siglo XXI.

VERGNAUD, G. (1990). «La teoría de los campos conceptuales». *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10 (2).

VERGNAUD, G. (1991). «Los problemas de tipo multiplicativo». En: *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.