Clase virtual Nº 15

Pensar en la enseñanza de las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos en la capacitación.

Autores: Graciela Chemello, Silvia Chara, Mónica Agrasar y Analía Crippa
Equipo Áreas curriculares del Ministerio de Educación

Introducción

En esta clase nos ocuparemos de los aspectos relevantes en la capacitación cuando se trata la enseñanza de los conocimientos geométricos referidos a las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos. Dicho grupo de contenidos forma parte de los incluidos en el bloque Geometría y Medida de los NAP, junto con los conocimientos espaciales y los conocimientos geométricos ligados a la medida.

Como ya hemos señalado, el estudio de las propiedades geométricas ha ido perdiendo espacio en la enseñanza escolar. En el primer apartado de esta clase nos ocuparemos entonces de cómo podemos promover, desde las instancias de capacitación su recuperación en las aulas, atendiendo a la importancia de su presencia en la formación de los niños y jóvenes.

Luego, en función de explicitar cuál es el tipo de trabajo geométrico en la clase acorde con el enfoque que sostenemos y en el marco en el cual se inscriben los NAP, plantearemos precisiones sobre los objetos geométricos, sus representaciones y la validación de propiedades.

Por último, presentaremos algunos ejemplos de actividades geométricas para la clase de primaria y los respectivos intercambios y sus discusiones con los maestros en los espacios de capacitación.

A. Algunas razones para enseñar las propiedades de las figuras. Su tratamiento en la capacitación

Planteamos la necesidad de promover la enseñanza las propiedades geométricas porque:

> **Estos conocimientos también intervienen en las situaciones prácticas**

Muchos son los ejemplos de profesiones y oficios donde es necesario dominar conocimientos geométricos. Los diseñadores, arquitectos, agrimensores y topógrafos por ejemplo deben crear e interpretar espacios y formas. Los químicos, biólogos, físicos y tecnólogos crean y manipulan modelos geométricos de moléculas, átomos, sistemas de fuerzas y materiales. Los electricistas, y carpinteros necesitan interpretar planos de obra, cableados, diseños de muebles, armado de partes de diversos objetos. En todos los casos para la realización de dichas actividades, se requieren saberes ligados a la medida, otros referidos a la representación de los espacios y objetos tridimensionales en el plano, y también de otros referidos a los elementos y propiedades de las diferentes formas expresadas en diferentes registros del lenguaje geométrico.

Sin embargo, como planteábamos, los saberes ligados a la medida tienen mayor presencia en la escuela que los referidos a las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.

En la clase 13 analizamos que una de las razones de esta situación es que, durante muchos años, se priorizó ligar los conocimientos a enseñar con su utilidad en situaciones de la vida cotidiana lo que, para el caso de los saberes geométricos, implicó la elección de los ligados a las medidas.

Pero además, al peso de esta tradición de enseñanza se une otra razón para la escasa presencia mencionada: la formación de muchos de los maestros que hoy están en las escuelas se dio en ese período, por lo cual, en general no han tenido oportunidades de reflexionar sobre la importancia de estos conocimientos en la formación de los niños.

En principio, queremos señalar la falta de pertinencia del recorte aún cuando el enfoque en la formación esté orientado a fines prácticos. Si bien es sabido que los saberes ligados a las actividades de medida y a las relaciones espaciales intervienen en las tareas que deben desarrollarse en muchas profesiones y oficios, no siempre es evidente que en esas tareas también intervienen las propiedades geométricas. En este sentido, Duval (2003) analiza un ejemplo conocido de una investigación de Berthelot y Salin del año 1994 en un trabajo en el que considera distintos tipos de actividades geométricas:

> "[En este tipo de actividades...] se trata de aprender a medir longitudes sobre un terreno en el suelo, o la distancia entre dos puntos marcados, y de transportarlas sobre un dibujo que adquiere el estatuto de plano. Nos situamos pues en dos escalas de magnitud que se trata de poner en correspondencia. [....] El problema del vidriero es un ejemplo típico (Berthelot y Salin, p. 40-41): ¿cuántas medidas hay que efectuar y cuáles para fabricar una ventana que entre en la abertura que tiene forma de paralelogramo? A partir de este ejemplo podemos darnos cuenta de que las propiedades geométricas se movilizan con fines de medida y sirven para escoger el tipo de constataciones a hacer en el espacio real que nos rodea, tanto para construir un objeto como para calcular una longitud o una distancia. La medida del radio de la Tierra de Eratóstenes es otro ejemplo célebre".
>
> Duval, 2003.

> **Porque es una oportunidad de adquirir una idea más acabada de la matemática como actividad de la cultura.**

Es fundamental reflexionar con los maestros que, en el enfoque que planteamos, es tan importante dominar los conocimientos geométricos para utilizarlos en las situaciones extra e intramatemáticas que los requieran, como aprender las formas de trabajar en matemática.

Entre las situaciones intramatemáticas, están por ejemplo el decidir si es posible o no construir una figura con un determinado conjunto de datos, o considerar cuántas y cuáles figuras se pueden construir a partir de ellos. En estos casos, el valor formativo está ligado, por una parte, a la comprensión de otro campo de problemas que interesa a los matemáticos, el de los derivados de la especulación sobre lo posible, lo que amplía y abre la concepción sobre esta ciencia. Consideramos que conocer el tipo de problemas que interesan a los matemáticos es central para comprender la actividad matemática como parte de la cultura.

Por otra parte, tanto los problemas extra como intramatemáticos brindan una oportunidad de avanzar en la puesta en juego de procedimientos propios del trabajo matemático en el marco geométrico: conjeturar una respuesta para un problema dado, investigar una posible solución, modificar el problema, cambiar el punto de vista para encararlo utilizando otra representación, intentar otro procedimiento, buscar justificaciones, entre otras.

La puesta en juego de estos saberes, es también la oportunidad de avanzar, en primer lugar, en la concepción de los objetos geométricos, en segundo lugar, en las formas de comunicación utilizando el lenguaje propio de este campo de forma cada vez más adecuada a la situación y en tercer lugar, en el tipo de justificaciones válidas en esta ciencia. Profundizaremos en estos tres aspectos en el desarrollo del segundo apartado.

En síntesis, la inclusión de saberes geométricos en la escuela primaria atiende tanto a razones instrumentales ligadas a la resolución de problemas en los que los modelos geométricos son una herramienta, como a razones formativas, ligadas a las formas de trabajar en matemática.

Para que estas razones sean comprendidas, es necesario que los maestros avancen hacia una concepción del trabajo geométrico más compleja que la que han tenido oportunidad de explorar en su formación. A continuación desarrollamos algunas ideas para promover dicho trabajo en la capacitación.

Sobre los objetos geométricos, sus representaciones y la validación de afirmaciones

Consideremos qué tipo de trabajo geométrico sería necesario desarrollar en la capacitación para que los maestros puedan vivir esa experiencia y reflexionar sobre ella en términos de su tarea de enseñanza.

Desde el enfoque propuesto, el trabajo geométrico en la clase es también una instancia de producción de soluciones originales a los problemas planteados por el docente, que se validan en la comunidad de la clase.

Para caracterizar el trabajo geométrico y su evolución en la clase, nos apoyamos en el trabajo de Balacheff (1987) quien, aunque se ocupa de la problemática de la validación, abre a una consideración más general sobre este trabajo. En Procesos de prueba y situaciones de validación este autor plantea precisiones sobre las "pruebas" que elaboran los alumnos diferenciando las "pragmáticas" de las "intelectuales":

> "Las pruebas pragmáticas se apoyan sobre los saberes prácticos esencialmente comprometidos en la acción; las pruebas intelectuales requieren que estos conocimientos puedan ser tomados como objeto de reflexión o de debate. Esto corresponde a una evolución que ha sido descripta clásicamente por la psicología cognitiva de Ginebra".
>
> Balacheff, 1987.

El autor señala que, en la evolución de esas pruebas, intervienen tres aspectos que interactúan y marcan las diferencias en las conceptualizaciones de quienes aprenden y por lo tanto en sus producciones:

> "La evolución de las pruebas pragmáticas hacia las pruebas intelectuales y la demostración, no está solamente marcada por una evolución de las características lingüísticas, sino también por la del estatuto y de la naturaleza del conocimiento. ..... El pasaje de las pruebas pragmáticas a las pruebas intelectuales, en especial a la demostración, se apoya así sobre tres polos que interactúan fuertemente:
>
> - el polo de los conocimientos: naturaleza de los conocimientos de los alumnos (según Vergnaud, 1984)
> - el polo lingüístico o de la formulación
> - el polo de la validación, o de los tipos de racionalidad que subyacen a las pruebas producidas."

Retomando lo planteado, podemos caracterizar el trabajo geométrico a lo largo de la escuela primaria como una práctica de resolución de problemas que a va evolucionando a lo largo del nivel. En el punto de partida se trata de experimentar sobre diferentes representaciones de figuras y cuerpos para encontrar una respuesta a las preguntas planteadas, mediante acciones como superponer, doblar, y medir, así como expresar justificaciones pragmáticas formuladas en un lenguaje coloquial. El punto de llegada consiste en la búsqueda de respuestas anticipando las acciones y la justificación con propiedades y utilizando un lenguaje más propiamente geométrico. En esta evolución también habrá inicialmente una concepción de los objetos geométricos como dibujos particulares para pasar -posteriormente- a considerarlos como la representación de una figura o una clase de figuras. Analicemos cada uno de los tres aspectos señalados, tomando en primer lugar la naturaleza de los conocimientos, para luego abordar de manera integrada los tipos de validación y sus modos de formulación.

Sobre los objetos geométricos y sus representaciones

Un conjunto de propiedades enunciadas en un ”texto” definen un objeto geométrico. Como ya hemos planteado en la clase 12, enunciaciones distintas pueden referirse al mismo objeto. Asimismo, un instructivo de construcción, también puede definir un objeto geométrico, que resulta de seguir los pasos indicados.

Ahora bien, varios documentos curriculares que retoman investigaciones didácticas de las últimas décadas señalan que, en los primeros años de la escuela, los niños asocian los objetos geométricos con dibujos de los mismos, sin diferenciar entre esa representación –que resulta siempre particular–, y los objetos mismos. Según una definición de Parzysz[1]: “La figura es el objeto geométrico descripto por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de ese objeto”.

Por ejemplo, todos los textos siguientes definen la misma figura, el cuadrado:

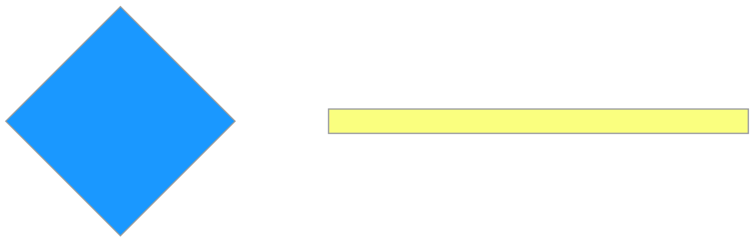
- Un rombo rectángulo
- Un paralelogramo con sus ángulos y lados congruentes.
- Un rombo de ángulos congruentes
- Un cuadrilátero con los ángulos rectos y los lados de igual medida

Para esta figura es posible realizar infinitos dibujos, tantos como resultan de las posibles medidas diferentes de sus lados.

[1] Citado por Sadovsky y otros (1998), a partir de un trabajo de Laborde, C. y Capponi, B. (1994). “CABRI GEOMETRE Constituant d’un milieu pour l’apprentissge de la notion de Figure geométrique », en Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 12-14. La Pensée Sauvage Éditions.

Como esta falta de discriminación entre el dibujo y la figura ha estado presente en la enseñanza durante muchos años, es conveniente incluir en la capacitación un debate acerca de esta cuestión. Un buen insumo para esta discusión es analizar ejemplos de dibujos que representen figuras "típicas" es decir, figuras dibujadas en posiciones y con dimensiones que fueron repetidas durante décadas en los libros de texto y por lo tanto reproducidas en las clases. En estos casos, además de la confusión entre los dos elementos mencionados, la estereotipia de los dibujos hace incluir una posición determinada y / o una dimensiones determinadas como características de una figura.

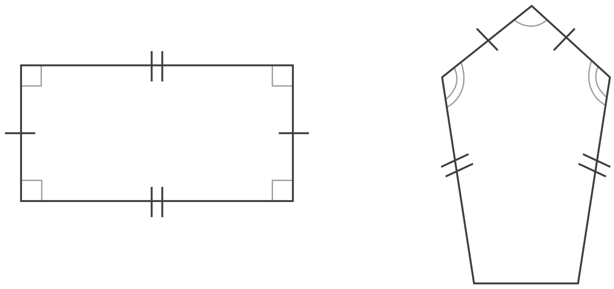
Esto conduce a confusiones como considerar al cuadrado como rombo porque "¿no ves que está de punta?", o "ese no es un rectángulo, es muy finito".



Otra alternativa de trabajo con los maestros, que les permite avanzar en la diferenciación entre dibujo y figura es analizar cómo distintos instructivos y distintas definiciones dan lugar a dibujos iguales. ¿Se trata en todos ellos de la misma figura o no? ¿Cuándo una figura es distinta de otra?

Otra cuestión importante para poner en discusión es plantear las relaciones existentes entre diferentes clases de figuras que dan lugar a diversas clasificaciones. Por ejemplo: ¿La clase de los triángulos equiláteros es disjunta con la de los triángulos isósceles? ¿Qué definiciones de equilátero e isósceles se están considerando? ¿Cómo intervienen en las definiciones los cuantificadores "todos"", "uno", "al menos uno", etc.?

Para el caso de las figuras geométricas, además del contorno, suelen incluirse en los dibujos otras informaciones con marcas. Por ejemplo, las relativas a los ángulos señalando arcos para indicar en una figura si nos referimos a los interiores o a los exteriores, o en un par de semirrectas del mismo origen si al cóncavo o el convexo, o si se trata de un ángulo recto cambiando el arco por un trazo con dos líneas rectas. O también, en relación con las medidas de los segmentos, indicando con una misma cantidad de rayitas los que son congruentes.



Por otra parte, en el marco geométrico se utiliza también una “notación” con letras, que permite diferenciar en una figura los diferentes elementos de un mismo tipo; por ejemplo, sus vértices, lados, ángulos, diagonales, etc. .

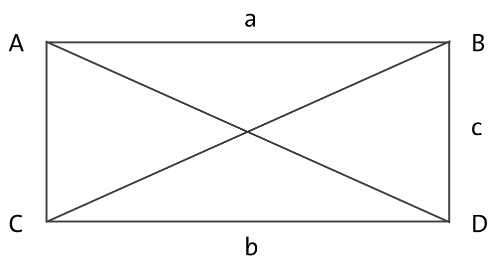
Por ejemplo, la notación permite indicar claramente a cuál de las diagonales nos referimos AC ó BD.

Asimismo esta notación también permite expresar las relaciones entre diferentes objetos haciendo uso de nuevos símbolos para acortar la escritura, por ejemplo:

a es paralela a b

a es perpendicular a c

$A\hat{O}B$ adyacente a $B\hat{O}C$



Convendrá discutir con los maestros en la capacitación sobre los modos de introducir en el aula este tipo de representación, aportando a la diferenciación de elementos en una misma figura o en todas las que intervienen en la situación planteada..

En relación con las representaciones de cuerpos geométricos, las más conocidas en las aulas son las realizadas en madera o acrílico y las realizadas en cartulina por los mismos alumnos a partir de los desarrollos planos de sus caras. También se utilizan otras con varillas como aristas y bolitas de plastilina como vértices. Todas ellas permiten el análisis de los elementos componentes de cada representación.

Es necesario advertir que en los libros de texto suelen aparecer representaciones planas realizadas con el código de las proyecciones a las que los alumnos no pueden otorgar significado si no se realiza un trabajo específico con ellas. Tanto las líneas de puntos, que representan las aristas que no se ven desde una posición específica, como las formas que resultan de las caras no contribuyen a la identificación de las representaciones correspondientes.

Recomendación de lectura

Recomendamos la lectura del artículo de Moriena S. y Scaglia, S. (2003), "Efecto de las representaciones estereotipadas en la enseñanza de la geometría", incluido en en *Educación Matemática* volumen 15, N° 1, abril 2003, p 5 a 19, Editorial Santillana. Disponible en línea en http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40515101.pdf

Sobre los tipos de pruebas y el lenguaje en que se expresan

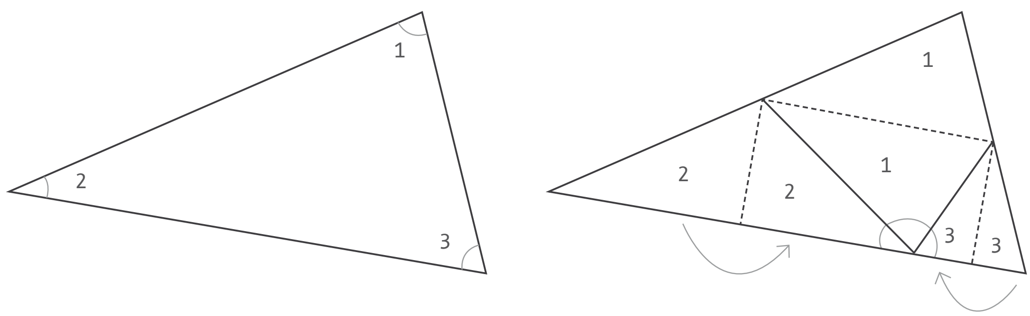
Como planteamos más arriba, al desarrollar un trabajo matemático en el que los alumnos producen soluciones originales a problemas nuevos para ellos, una parte de la tarea es asegurarse de que las respuestas obtenidas sean válidas. Esto implica dar razones de por qué se piensa que lo que se dice es verdadero. Esta tarea se realiza en el marco de un debate de toda la clase, en el que cada uno explica sus razones, y acepta o no las razones de otros.

Queremos avanzar ahora en el análisis de ejemplos que muestran la diferencia entre dos tipos de actividades bien diferenciadas: por un lado, aquellas que dan lugar a la experimentación a través de acciones como superponer, doblar, y medir para encontrar una respuesta; por el otro, las actividades las que procuran que los alumnos realicen una anticipación de estas acciones, es decir, una experiencia mental que las haga innecesarias.

En este sentido, un ejemplo interesante es el referido a la actividad que permite estar seguros de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados.

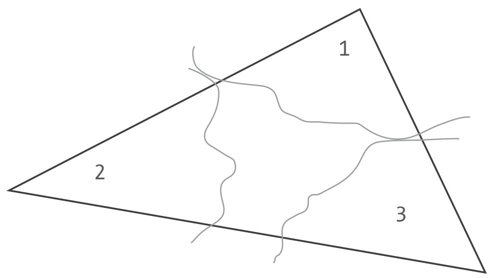
Muchos libros de texto presentan una de las dos alternativas siguientes para que los alumnos realicen con un triángulo "general"[2] recortado: doblarlo como se indica en la imagen 1 o cortarlo y ubicar las partes como se indica en la imagen 2.

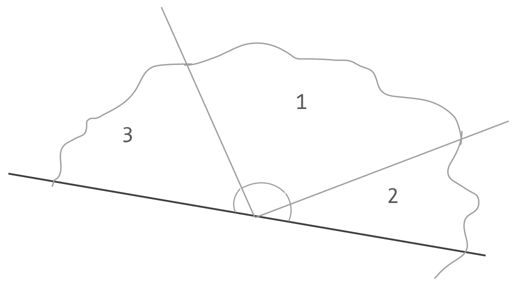
Alternativa 1



[2] Es importante tener en cuenta explicitar en la capacitación que se denomina triángulo general a aquél que no es isósceles, ni equilátero ni rectángulo.

Alternativa 2

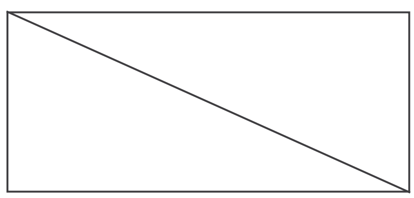




En un texto para quinto grado (Barallobres, 2007) se propone, en cambio, una explicación realizada en una secuencia en dos pasos. El primero consiste en obtener, a partir de un rectángulo, - figura sobre la que los alumnos ya “saben” algunas propiedades- un triángulo particular. El segundo paso se realiza sobre un triángulo general. Veamos en qué consisten ambos pasos:

- **Paso 1**:

  De un rectángulo ABCD podemos obtener dos triángulos rectángulos que son congruentes.



En esos triángulos rectángulos ABC y ADC tenemos que B y D valen 90° porque el rectángulo ABCD tiene cuatro ángulos rectos.

En ABC marcamos 1 y 2 y en ADC 3 y 4 y sabemos que 1= 3 y que 2 = 4.

Como 1 + 2 + 3 + 4 = 180,

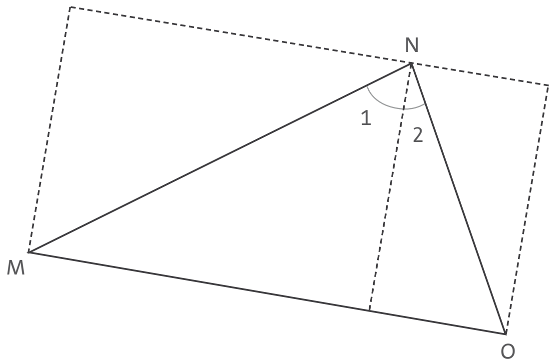
entonces reemplazamos por los iguales 1 + 2 + 1 + 2 = 180 gr

y como 2 veces 1 + 2 = 180 gr , entonces 1 + 2 = 90 grados

y por lo tanto en el triángulo rectángulo ABC 1 + 2 + B = 180 grados.

- **Paso 2**:

  Cuando el triángulo no es rectángulo como en MNO, puede trazarse una altura NP para transformarlo en dos triángulos rectángulos MNP y PNO.



Aquí ya sabemos que M + 1 + 90 gr = 180 grs y entonces M + 1 = 90 gr

y que O + 2 + 90 gr = 180 grados y entonces O + 2 = 90 gr

Sumando M + 1 + O + 2 = 180 gr, como 1 + 2 = N

Entonces M + N + O = 180 gr.

En esta segunda propuesta se parte de la congruencia de los dos triángulos rectángulos suponiendo que la experiencia real se ha realizado antes y, si no ha sido así, que los alumnos pueden imaginar la experiencia, realizarla mentalmente.

Si bien no podemos plantear que en estos ejemplos haya una instancia de validación, ya que no estamos desarrollando pruebas elaboradas por los alumnos, podemos diferenciar en ellos explicaciones que se apoyan en experiencias en un caso, y en propiedades en el otro.

Consideremos ahora el lenguaje utilizado por los alumnos cuando se involucran en situaciones en las que se les pide explicitar las razones por las que consideran válidas sus respuestas, para avanzar en la diferenciación entre el lenguaje utilizado en uno y otro tipo de pruebas: pragmáticas e intelectuales.

Al respecto, veamos lo que plantea Balacheff:

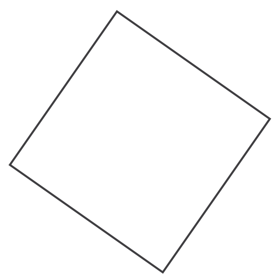
"Las pruebas del práctico son en primer lugar, pragmáticas. La comunicación de estas pruebas se hace por ostensión. Las operaciones y los conceptos que ellas movilizan se actúan: '¿la prueba? ¡Esto funciona!'. Esto no significa no obstante la ausencia de todo lenguaje, pero no está aquí la herramienta fundamental de expresión del conocimiento. La prueba pragmática está verificada por la acción y no por el discurso [...]. Podemos tratar de impedir este recurso en la práctica por medio de restricciones diversas: (por ejemplo) poniendo a los individuos en una situación de debate en el que los elementos constitutivos de la validación deben ser formulados [...] Pero esta separación de lo pragmático no es evidente: la práctica que se prohíbe puede ser evocada y el discurso puede quedar muy cerca de lo que el alumno (o el práctico) ha vivido. Él se expresará en el 'lenguaje de la familiaridad'."

Balacheff, 1987.

Los siguientes ejemplos piden explícitamente la elaboración de justificaciones.

Problema 1

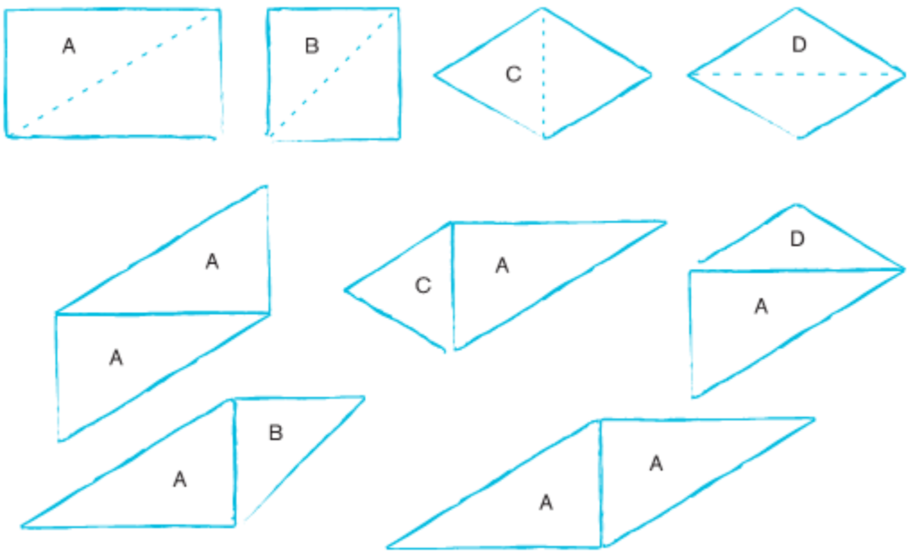
Matías dice que esta figura no es un cuadrado, pero Sofía dice que sí. ¿Quién tiene razón? ¿Cómo podés estar seguro?



En este caso las justificaciones que plantean los chicos plantean la posibilidad de "mover" el cuadrado sobre la hoja y, si se les da, la figura representada por un papel glacé; suelen "doblarlo" en mitades por la diagonal para que queden "superpuestos" los lados y así mostrar la congruencia de lados y ángulos.

Problema 2

Los cuadriláteros dibujados se obtuvieron armándolos con dos de los triángulos obtenidos al dividir por su diagonal el rectángulo, el cuadrado y el rombo de las dimensiones indicadas. (lados del rectángulo 10 x 6, lado del cuadrado 6, diagonales del rombo 10 y 6)



En este caso, la justificación que hagan los chicos del tipo de cuadriláteros que se obtienen podrá relacionarse con la congruencia o no de lados, la presencia de ángulos rectos, etcétera.

Por ejemplo, para los dos cuadriláteros formados con dos triángulos A, es posible plantear que tienen: un par de lados opuestos congruentes porque los dos triángulos A lo son y sus lados son los lados opuestos o son las diagonales del rectángulo origen. También, apoyándose en los ángulos rectos del rectángulo original se puede decir que los lados opuestos son paralelos entre sí ya que ambos son perpendiculares a un tercero, el otro lado del rectángulo.

En la capacitación, convendrá proponer problemas para que los maestros tengan oportunidad de elaborar diferentes tipos de pruebas y analizar su validez. Por otra parte, será importante advertir que los alumnos, en los primeros años de su recorrido escolar, elaboran pruebas pragmáticas y éstas son consideradas pertinentes en el marco de la comunidad clase, teniendo en cuenta que la propuesta de los NAP es que puedan avanzar hacia validaciones intelectuales en los últimos años.

Sobre las actividades geométricas para la clase de primaria y su discusión en la capacitación

En estos últimos años, son muchas las propuestas elaboradas que permiten plantear en la clase actividades geométricas problematizadoras, es decir, problemas en los que los saberes geométricos surgen como instrumentos de resolución y, por lo tanto, dan lugar a una tipo de trabajo geométrico como el que venimos explicitando.

En los NAP nos referimos a la formulación de los saberes que los alumnos debieran poder desplegar en estas actividades, y a las tareas que los involucran. Así, tomando como ejemplo los NAP de tercero y sexto grados, hemos considerado:

En tercero

- **Construir y copiar** modelos hechos con formas bi y tridimensionales con diferentes materiales (tipos de papel e instrumentos)
- **Comparar y describir** figuras y cuerpos según sus características (número de lados y vértices, bordes curvos o rectos, igualdad o no en la medida de sus lados, forma y número de caras) para que otros las reconozcan o las dibujen.
- Explorar afirmaciones acerca de las características de las figuras y **argumentar** sobre su validez.

En sexto

- Describir, comparar y clasificar figuras en base a propiedades conocidas
- Producir y comparar desarrollos planos de cuerpos argumentando sobre su pertinencia
- Copiar y construir figuras a partir de diferentes informaciones sobre propiedades y medidas, con diferentes instrumentos y evaluando la adecuación de la figura obtenida.
- Componer y descomponer figuras y argumentar sobre las propiedades de figuras obtenidas
- Analizar afirmaciones acerca de las propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez

En los últimos años se ha producido mucho material curricular con propuestas de trabajo para la clase de primaria que, con una gestión de la clase según lo que venimos planteando, dan lugar a que los alumnos puedan apropiarse de los saberes explicitados en los NAP.

Para avanzar en el repertorio del material disponible, hemos organizado los saberes en grupos, en función de los tipos de situaciones en los que pueden desplegarse. Veamos entonces situaciones pensadas para:

Comparar, describir, reconocer, clasificar

Las situaciones de adivinanza implican la presentación de un conjunto de figuras que se elige según las propiedades que se pretenda trabajar. Los alumnos formularán preguntas para descubrir la figura que el docente ha pensado, frente a una consigna que describe el tipo de preguntas posibles. Las preguntas surgirán de la comparación de las características de las figuras y luego permitirán describir cada una. Asimismo, de la organización de grupos de figuras con propiedades comunes podrán surgir diferentes clasificaciones de las mismas.

Se puede encontrar un ejemplo de este tipo de actividades en los Cuadernos para el aula y en Juegos para aprender Matemática de primero ciclo y segundo ciclo de la escuela primaria[3].

Copiar y construir

Las situaciones de copia con y sin modelo presente, y de construcción a partir de un dictado, un pedido de datos o a partir de datos, se explican en documento *Matemática. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo* elaborado por Sadovsky y otros para la Ciudad de Buenos Aires[4]. Al momento de elegirlas para la clase de primaria, es importante considerar cuáles son los conocimientos geométricos que se ponen en juego en cada caso. En este sentido, presentamos una breve síntesis descriptiva:

- Copiar con modelo presente: La figura se ubica al lado de cada chico, ellos deben pensar la figura en términos de los elementos y las relaciones que la constituyen sin explicitarlas.
- Copiar sin modelo presente: La figura se ubica en una mesa en el aula y los chicos pueden ir a buscar la información que quieran tantas veces como el docente lo estipule; ellos deben anticipar la información que necesitan y registrarla.
- Pedir datos: El maestro tiene la figura, dice qué figura tiene y cada chico decide qué datos pedir. Para ello deben concebir la figura genérica porque no la puede ver.
- Construir a partir de datos: No hay dibujo de la figura que se pide construir, sólo los datos: los alumnos deben anticiparla, así como considerar de qué manera se usará la información que se tiene. Estas situaciones permiten discutir la constructibilidad de la figura (si se puede o no construir) y cantidad de soluciones posibles.
- Dictar una figura: Intercambio de información con mensajes, superposición de figuras como validación; requiere de la explicitación de relaciones

[3] Estos materiales se encuentran accesibles en la sección *Sitios* de la plataforma virtual.
[4] Este material se encuentra accesible en la sección *Archivos* de la plataforma virtual.

Formar figuras a partir de otras

Las situaciones para armar nuevas figuras a partir de otras y desarmar figuras considerando otras líneas además de su contorno, dan lugar al establecimiento de relaciones entre las figuras que intervienen. Son ejemplos de estas actividades de formación de nuevas figuras las planteadas a partir del Tangram en los Juegos para aprender Matemática, las que se proponen en el Cuadernos para el aula de 6to para obtener las fórmulas de área de algunos polígonos y las del Cuaderno para el aula de 4to en la secuencia Armar y desarmar figuras.

Al respecto, Duval (2003) plantea en el artículo citado, que es posible, como una "entrada" diferente al trabajo geométrico, pensar en la resolución de problemas con figuras, además de las líneas del contorno, otras propias de misma figura -como diagonales o alturas-, o líneas que resultan de la construcción -como la circunferencia circunscripta al cuadrado si se construye a partir de sus diagonales-, o líneas de una trama en la que puede ubicarse a las figuras.

Analizar afirmaciones y clasificar

Estas tareas permiten retomar y sistematizar conocimientos elaborados en los tipos de situación anteriores. Son ejemplos de estas actividades las de organización de cuadros clasificatorios, como la que se plantea en el *Cuaderno para el aula* de 5to grado, o las que permiten el análisis de la verdad o falsedad de ciertas afirmaciones, así como elaborar proposiciones verdaderas y proposiciones falsas para una cierta figura, como las que se incluyen en el Cuaderno de 7mo., en los capítulos *Parece distinto pero no lo es* y *Parece que vale pero no*.

Por último queremos señalar algunos ejemplos de situaciones de doble conceptualización que nos parecen interesantes para trabajar con los maestros, ya que permiten un análisis tanto matemático como didáctico que enriquecerá sus concepciones de matemática, de aprendizaje y de enseñanza.

En este sentido seleccionamos dos situaciones que permiten analizar los dos aspectos que desarrollamos en esta clase: las diferentes formas de representar o de referirse a un mismo objeto geométrico –situación incluida en el *Cuadernos para el aula* de 7mo., p. 40- y las diferentes formas de validar una afirmación, como la que puede observarse en el material de Prociencia de 1998.

Situación 1

a. En un juego de mensajes, Rocío, Esteban y Matías discutían acerca de cómo dibujar la figura que, según el texto, debía ser un cuadrilátero cuyas diagonales midieran 8 cm.

Rocío dijo que tenían que hacer un rectángulo, porque el rectángulo tiene diagonales de igual medida. Matías dijo que también podía ser un romboide a un trapecio. Esteban dijo que podía ser un paralelogramo pero que no podía ser un romboide, porque los romboides tienen una diagonal más larga que la otra. ¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

b. Si en el mensaje se hubiera pedido que las diagonales fueran perpendiculares, los chicos, ¿podrían haber pensado en las mismas figuras? ¿Por qué?

c. ¿Y si se hubiera pedido que las diagonales midieran 8 cm y además fueran perpendiculares?

En el mensaje no dice ni cómo deben cortarse los segmentos que conforman las diagonales (perpendicularmente o no) ni dónde (puntos medios o no), lo que da lugar a distintas alternativas, rectángulo, cuadrado, trapecio isósceles o romboide como solución. Estas alternativas se van analizando en las diferentes preguntas, lo que da lugar a precisar las características de las diagonales que definen las diferentes figuras y los textos correspondientes.

En la capacitación se podrán discutir las respuestas a estas preguntas, elaborar los textos y también si esos textos son datos suficientes para definir las figuras correspondientes, comparando estos textos con los más conocidos que definen las figuras por las propiedades de sus lados y ángulos.

Situación 2

Construyan un rectángulo ABCD con medidas AB = 10 cm y BC = 6 cm. Sobre la diagonal AC marquen un punto a 9 cm de A. Tracen una paralela al lado AD que pase por P, cortará a AB en I y a CD en J. También por P tracen una paralela al lado AB que cortará a AD en K y a BC en L. ¿Cuál de los rectángulos IBLP o KPJD tiene un área mayor?

Para responder la pregunta, el problema da lugar a procedimientos de cálculo con fórmulas, y eventualmente, usando propiedades y también a uno razonando a partir de considerar pares de triángulos congruentes. Sólo este último, arriba a la respuesta adecuada, ya que los otros dos procedimientos se apoyan en mediciones o en cálculos cuyos resultados sólo pueden aproximarse. Así, el problema permite mostrar los límites de este último tipo de procedimiento.

Para concluir, queremos plantear que, como siempre que hacemos un recorte, nos han quedado pendientes temas que también dan lugar a interesantes discusiones con los maestros en la capacitación. En particular, cómo se juega la variable didáctica en todos los tipos de situaciones planteadas, lo que será tomado en nuestra próxima y última clase.

Actividad obligatoria

I. Consideren los problemas siguientes y anticipen qué podrían responder los maestros al trabajarlos en la capacitación.

II. Escriban las preguntas que realizarían en la capacitación para realizar un análisis didáctico de los problemas con los maestros.

III. Escriban las conclusiones matemáticas y didácticas a las que podrían arribar.

Problema 1 (p 25)

a. Si dos instructivos para construir figuras geométricas difieren entre sí, ¿son necesariamente distintas las figuras que se obtienen?

b. Dada una figura, ¿existe una única forma de describirla?

c. Dibujá una figura y referite a ella de dos formas diferentes.

Problema 2 (p 45)

Para cada una de las afirmaciones siguientes, buscá un ejemplo que sirva para justificar que la afirmación es falsa.

- Todos los romboides tienen sus diagonales distintas
- Si un cuadrilátero tiene sus ángulos congruentes, los lados también son congruentes
- Los cuadriláteros que tienen ángulos opuestos congruentes, tiene lados paralelos.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (2003), *Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas*.

Balacheff, N. (1987),“Procesos de prueba y situaciones de validación”, en *Educational Studies in Mathematics* N° 18 (1987), pp 147-176.

Barallobres, G. y otros (2007), Matemática 5. Buenos Aires: Aique.

Ministerio de Educación de la Nación. (2003-2006), *Cuadernos para el aula* 1° a 7° año.

Moriena S. y Scaglia, S. (2003), “Efecto de las representaciones estereotipadas en la enseñanza de la geometría”, en *Educación Matemática* vol. 15, N° 1, abril 2003, p 5 a 19. Buenos Aires: Santillana.

Sadovsky, P. y otros (1998), *Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Serie Actualización Curricular, GCBA.

Sessa, C. “Acerca de la enseñanza de la geometría”, en Hanfling, M. y otros (1998) *Matemática. Temas de su didáctica*. Colección Prociencia, CONICET.